Spis treści

1 Podzielność w $\mathbb{Z}$ oraz indukcja

1.1 Podzielność w $\mathbb{Z}$

Zadanie 1.1. Wykaż, że:

(a) $a|b \Rightarrow a|bc$,

(b) $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$,

(c) $a|b \Rightarrow a|(-b)$,

Zadanie 1.2. Znajdź resztę z dzielenia:

(a) 2103 przez 7,

(b) -151 przez 11,

(c) -301 przez 13.

Zadanie 1.3. Wykaż, że:

(a) jeżeli $11|a+5b$, to $11|9a+b$,

(b) jeżeli $7|2a-3b$, to $7|a+2b$,

(c) jeżeli liczba $\frac{2a-3b}{5}$ jest całkowita, to liczba $\frac{a+b}{5}$ również,

(d) jeżeli liczba $\frac{a-5b}{7}$ jest całkowita, to liczba $\frac{3a+6b}{7}$ również.

Zadanie 1.4. Udowodnij, że jeżeli ostatnią cyfrą liczby n jest 5, to dwie ostatnie cyfry liczby n^2 to 25.

Zadanie 1.5. Liczba $a = 151$ przy dzieleniu przez pewną liczbę dodatnią całkowitą b daje iloraz $k = 11$ i resztę r. Znaleźć dzielnik b oraz resztę r.

Rozwiązanie. $b = 13$, $r = 8$

Zadanie 1.6. Wykaż, że kwadrat każdej liczby całkowitej nieparzystej daje resztę 1 z dzielenia przez 8.

Zadanie 1.7. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, liczba $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)$ dzieli się przez 5.

Zadanie 1.8. Oblicz resztę z dzielenia liczby $a \cdot b$ przez 2022 wiedząc, że liczby a i b dają resztę 1 przy dzieleniu przez 2022.

1.2 Indukcja

Zadanie 1.9. Udowodnij dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}_+$ indukcyjnie równości:

(a) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$,

(b) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

(c) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

(d) $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, $q \neq 1$

(e) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Zadanie 1.10. Udowodnij indukcyjnie podzielności:

(a) $10|11^n - 1$,

(b) $14 | 13^n - (-1)^n$,

(c) $5 | 2^{4n+1} + 3$,

(d) $13 | n^{13} - n$.

Zadanie 1.11. Udowodnij indukcyjnie nierówności:

(a) $n! > 2^n$, dla $n > 3$,

(b) $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}_{\text{n pierwiastków}} < 2$,

(c) $(1 + a)^n \geq 1 + na$ dla $a > -1$, $a \in \mathbb{R}$,

(d) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

2 NWD, NWW, algorytm Euklidesa

Zadanie 2.1. Wykaż, że dla $c > 0$: $NWD(c \cdot a, c \cdot b) = c \cdot NWD(a, b)$.

Zadanie 2.2. Wykaż, że:

(a) $NWD(a, b, c) = NWD(NWD(a, b), c)$,

(b) $NWW(a, b, c) = NWW(NWW(a, b), c)$.

Zadanie 2.3. Oblicz NWD:

(a) $NWD(51, 136)$

(b) $NWD(90, 189, 252)$

(c) $NWD(108, 276, 204)$

Zadanie 2.4. Oblicz NWW:

(a) $NWW(51, 136)$

(b) $NWW(279, 372)$

(c) $NWW(115, 161)$

Zadanie 2.5. Największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy 24, a ich najmniejsza wspólna wielokrotność jest równa 2496. Znaleźć liczby a i b.

Zadanie 2.6. Oblicz:

(a) $NWD(n, n + 1)$,

(b) $NWD(n, n + 3)$,

(c) $NWD(37n + 2, 15n + 1)$.

Zadanie 2.7. Niech (F_n) będzie ciągiem Fibbonacciego, zdefiniowanym równościami:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \text{ dla } n \geq 0.$$

Wykaż, że $NWD(F_n, F_{n+1}) = 1$ dla każdego n.

Zadanie 2.8. Pokazać, że:

$$NWD(a, b) \cdot NWD(a, c) \cdot NWD(b, c) \cdot NWW(a, b) \cdot NWW(a, c) \cdot NWW(b, c) = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2.$$

Zadanie 2.9. **(a)** Liczby a oraz b są względnie pierwsze. Wykaż, że $a \cdot b | c \Leftrightarrow a | c \wedge b | c$.

(Wsk. naśladuj dowód lematu Euklidesa.)

(b) Podaj przykład liczb a, b, c takich, że $a|c$ oraz $b|c$, ale $a \cdot b \nmid c$.

Zadanie 2.10. Rozwiąż układy równań:

(a) $\begin{cases} NWD(x, y) = 45 \\ x/y = 11/7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} NWD(x, y) = 20 \\ x \cdot y = 8400 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} NWD(x,y) = 30 \\ x + y = 150 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y = 667 \\ \frac{NWW(x,y)}{NWD(x,y)} = 120. \end{cases}$

Zadanie 2.11. Rozwiąż równania:

(a) $14x + 28y = 39$

(b) $7x - 8y = 44$

(c) $17x + 39y = 83$

(d) $42823x + 6409y = 17$

(e) $42823x + 6409y = 68$

(f) $3x + 2y + 4z = 1$

(g) $3x + 5y + 6z = 5.$

Zadanie 2.12. * Fabryka wysyła towar w paczkach po 3 kg i po 5 kg. Wykazać, że można w ten sposób wysłać każdą całkowitą ilość kilogramów większą niz 7.

Zadanie 2.13. * Pokaż, że dla dowolnych liczb naturalnych parami względnie pierwszych p, q, r równanie:

$$x^p + y^q = z^r$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x, y, z.

3 Liczby pierwsze i złożone

Zadanie 3.1. Podaj przykład liczb m, a, b takich, że $m|a \cdot b$, ale $m \nmid a, b$.

Zadanie 3.2. Liczba p jest pierwsza i dzieli $a^2 - b^2$. Wykaż, że $p|a - b$ lub $p|a + b$.

Zadanie 3.3. Wykaż, że jeżeli $a^{2022}|b^{2022}$, to $a|b$.

Zadanie 3.4. Liczby a, b są względnie pierwsze. Wykaż, że jeżeli $a \cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej, to liczby a, b również.

Zadanie 3.5. Ile różnych dzielników ma liczba $n = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^{32} \cdot 7^{2022}$?

Zadanie 3.6. Liczby pierwsze p i q, gdzie $p > q$, nazywamy **bliźniaczymi**, jeżeli $p - q = 2$. Udowodnij, że liczby pierwsze p i q, gdzie $p > q$ są bliźniacze wtedy i tylko wtedy, gdy $pq + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 3.7. Liczbę naturalną nazywamy **bezkwadratową**, jeżeli nie dzieli się ona przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1 (przykładowo liczba 6 jest bezkwadratowa, zaś 12 – nie, ponieważ $4|12$). Wykaż, że dowolną liczbę naturalną można jednoznacznie zapisać w postaci $a^2 \cdot b$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$, zaś b jest liczbą bezkwadratową.

Zadanie 3.8. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą różnymi liczbami pierwszymi. Wykaż, że $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k}$ nie jest liczbą całkowitą.

Zadanie 3.9. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, dających resztę 3 z dzielenia przez 4.
(Wsk. Naśladuj dowód tw. Euklidesa)

Zadanie 3.10. Wykaż, że wszystkie rozwiązania równania $x^2 + y^2 = z^2$ w liczbach całkowitych są postaci

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

dla pewnych liczb całkowitych m, n.
(Wsk. możemy założyć, że x, y, z są parami względnie pierwsze, dzieląc je przez ich NWD. Pokaż, że jedna z liczb x, y jest parzysta. Rozważ równość $(y/2)^2 = (x - z)/2 \cdot (x + z)/2$ i skorzystaj z zadania 4.)

Zadanie 3.11. Liczby a, b, c są całkowite dodatnie, przy czym $a^2 + b^2 = c^2$. Dowieść, że $c^2 + \frac{2}{3}ab$ jest całkowita i złożona.

Zadanie 3.12. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.

Zadanie 3.13. Wykaż, że dla każdego n istnieje n kolejnych liczb złożonych.
(Wsk. rozważ liczby $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \ldots, (n + 1)! + n + 1$, gdzie $(n + 1)!$ oznacza silnię)

Większość zadań pochodzi z materiałów opracowanych przez dra J. Garnka

4 Kongruencje

Zadanie 4.1. Znajdź reszty z dzielenia:

(a) 3^{22} przez 23

(b) 7110^{379} przez 17

(c) 7077^{377} przez 13

Zadanie 4.2. Wykaż, że:

(a) $7|2^{n+2} + 3^{2n+1}$,

(b) $21|2^{4^n} + 5$,

(c) $2^{5n+1} + 4^{5n+1} - 6 \equiv 0 \pmod{31}$.

(d) $7|2222^{5555} + 5555^{2222}$,

(e) $35|3^{6^n} - 2^{6^n}$,

(f) $5|3^{53} + 7^{32} + 6^{13}$,

(g) $7|2^{1988} - 4$,

(h) $13|3^{1974} + 5^{1974}$

Zadanie 4.3. Jaka jest cyfra jedności liczby 2^{1000}?

Zadanie 4.4. Wyznaczyć resztę z dzielenia liczby $1994 \cdot 1995 \cdot 1996 + 1997^2$ przez 7.

Zadanie 4.5. Znaleźć, jeśli istnieje, element odwrotny do a modulo n .

(a) $a = 5$, $n = 7$,

(b) $a = 3$, $n = 9$,

(c) $a = 35$, $n = 101$,

(d) $a = 58$, $n = 189$,

(e) $a = 111$, $n = 1891$.

Zadanie 4.6. Rozwiąż kongruencję:

(a) $11x \equiv 5 \pmod{28}$,

(b) $3x \equiv 2 \pmod{7}$,

(c) $6x \equiv 4 \pmod{12}$,

(d) $5x \equiv 1 \pmod{6}$,

(e) $8x \equiv 20 \pmod{16}$.

Zadanie 4.7. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby $99^{99} - 49^{49}$.

Zadanie 4.8. Udowodnij, że 0 jest ostatnią cyfrą liczby $53^{53} - 33^{33}$.

Zadanie 4.9. Załóżmy, że liczby $a_1, a_2, ..., a_{2011} \in \mathbb{Z}$ są nieparzyste. Znajdź resztę, jaką daje suma ich kwadratów przy dzieleniu przez 4.

Zadanie 4.10. Rozwiąż układ kongruencji:

(a) $$\begin{cases} x + 2y \equiv 2 \pmod{5}, \\ 3x - y \equiv 3 \pmod{5}, \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 3x - 2y \equiv 1 \pmod{7} \\ 4x + y \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

Zadanie 4.11. Udowodnij, że jeżeli ostatnią cyfrą liczby n jest 5, to dwie ostatnie cyfry liczby n^2 to 25.

Zadanie 4.12. Dana jest liczba całkowita a oraz liczba pierwsza p. Wykaż, że jeżeli $5a \equiv 1 \pmod{p}$ i $a \equiv 10 \pmod{p}$, to $a \equiv 3 \pmod{p}$.

Zadanie 4.13. Znaleźć wszystkie $n \in \mathbb{Z}$, takie że $n + 2 | n^2 + 3$.

Zadanie 4.14. Udowodnij, że jeżeli $x \in \mathbb{Z}$, zaś p jest liczbą pierwszą, taką że

$$x^3 \equiv 2x^2 + 3x \pmod{p}$$

to co najmniej jedna z liczb $x, x - 3, x + 1$ dzieli się przez p.

Zadanie 4.15. Wykaż, że jeżeli $p \in \mathbb{P}$, $p | a + 1$, to $p^{n+1} | a^{p^n} + 1$.

Zadanie 4.16. Wyznacz cztery ostatnie cyfry liczby 5^{5555}.

5 Chińskie twierdzenie o resztach

Zadanie 5.1. Dowódca kazał ustawić się oddziałowi piątkami oraz siódemkami. Bez piątki pozostał 1 żołnierz, bez siódemki – dwóch. Ilu żołnierzy może mieć oddział, wiedząc że jest ich więcej niż 70 oraz mniej niż 100?

Zadanie 5.2. Rozwiąż układy kongruencji:

(a) $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 7 \\ x \equiv 4 \pmod 6 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 4 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$.

Zadanie 5.3. Poproś kogoś, żeby wybrał liczbę naturalną mniejszą od 60 i wykonał następujące czynności:

(a) podzielił ją przez 3 i podał resztę. Niech tą resztą będzie a,

(b) podzielił ją przez 4 i podał resztę. Niech tą resztą będzie b,

(c) podzielił ją przez 5 i podał resztę. Niech tą resztą będzie c.

Wybrana liczba jest resztą otrzymaną z dzielenia liczby $40a + 45b + 36c$ przez 60. Wytłumacz.

Zadanie 5.4. Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi.

(a) Ile rozwiązań ma kongruencja $x^2 \equiv 1 \pmod p$?

(b) Ile rozwiązań ma kongruencja $x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$?

(c) Znajdź wszystkie rozwiązania kongruencji $x^2 \equiv 1 \pmod{15}$.

Zadanie 5.5. Znajdź najmniejszą liczbę dodatnią, która daje resztę 1 przy dzieleniu przez 11, resztę 2 przy dzieleniu przez 12 i resztę 3 przy dzieleniu przez 13.

Zadanie 5.6. Znajdź liczbę trzycyfrową (w systemie dziesiętnym), która daję resztę 4 przy dzieleniu przez 7, 9 i 11.

Zadanie 5.7. Oblicz, ile jest liczb naturalnych mniejszych od 2000, które przy dzieleniu przez 11 dają resztę 1, a przy dzieleniu przez 4 dają resztę 3.

Zadanie 5.8. Wykaż, że układ kongruencji

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod m \\ x \equiv b \pmod n \end{cases}$$

ma rozwiązanie x wtedy i tylko wtedy, gdy $a \equiv b \pmod{NWD(m,n)}$.

Zadanie 5.9. * Czy istnieją parami różne liczby pierwsze p, q, r takie, że $p|rq-1$, $q|pr-1$, $r|pq-1$?

6 Cechy podzielności

Zadanie 6.1. Wybierz liczbę od 1 do 9. Pomnóż ją przez 3, dodaj trzy do wyniku i ponownie pomnóż przez 3. Jeżeli wynikiem jest liczba dwucyfrowa, dodaj cyfry do siebie. Wynik to Twój ulubiony przedmiot.

(1.) WF

(2.) Geografia

(3.) Chemia

(4.) Język angielski

(5.) Kanapka

(6.) Język polski

(7.) Edukacja dla bezpieczeństwa

(8.) Język hiszpański

(9.) Wstęp do algebry i teorii liczb

(10.) Historia

(11.) Plastyka

(12.) Muzyka

(13.) Język niemiecki

(14.) Repetytorium z matematyki elementarnej

(15.) Technika

(16.) Fizyka

(17.) Religia/etyka

(18.) Wiedza o społeczeństwie

Zadanie 6.2. Pokazać, że liczby 5050505 nie można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych.

Zadanie 6.3.

(a) Wykaż, że każda liczba naturalna daje przy dzieleniu przez 7 taką samą resztę jak liczba, powstała przez skreślenie jej ostatnich trzech cyfr, a następnie przez odjęcie od liczby skreślonej tak powstałej liczby.

(b) Jaką resztę z dzielenia przez 7 daje liczba 104456?

Zadanie 6.4.

(a) Wykaż, że każda liczba naturalna daje przy dzieleniu przez 11 taką sama resztę, jak suma jej cyfr na pozycjach nieparzystych (licząc od rzędu jedności) minus suma cyfr na pozycjach parzystych.

(b) Jaką resztę z dzielenia przez 11 daje liczba 109234?

Zadanie 6.5.

(a) Zamień liczbę $n = (\overline{731})_8$ (zapisaną w zapisie ósemkowym) na liczbę zapisaną w systemie dziesiętnym.

(b) Zapisz liczbę $n = 100$ w systemie ósemkowym.

(c) Wykaż, że liczba $n = (\overline{n_k n_{k-1} \dots n_0})_8$ (zapisana w zapisie ósemkowym) daje taką samą resztę przy dzieleniu przez 7, jak suma jej cyfr.

Zadanie 6.6. Wykaż, że każda liczba naturalna daje przy dzieleniu przez 2^n taką samą resztę, jak liczba złożona z n jej ostatnich cyfr.

Zadanie 6.7. Wyprowadź cechy podzielności przez 13, 101, 5^n.

7 Małe Twierdzenie Fermata i twierdzenie Eulera

7.1 Małe twierdzenie Fermata

Zadanie 7.1. Znajdź resztę z dzielenia:

(a) 2^{505} przez 101,

(b) 4^{123} przez 13,

(c) 522^{204} przez 13.

Zadanie 7.2. Niech $p > 5$ będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że p dzieli liczbę $\underbrace{11\ldots1}_{p-1}$.

Zadanie 7.3. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że dla $p \nmid a$ mamy: $a^{(p-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod p$.

Zadanie 7.4. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Znajdź resztę z dzielenia 2^{p^2} przez p.

Zadanie 7.5. Niech p, q będą różnymi liczbami pierwszymi. Oblicz $p^{q-1} + q^{p-1} \pmod{pq}$.

Zadanie 7.6. Udowodnij, że dla liczby pierwszej $p \neq 2, 3$ zachodzi: $2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} \equiv 1 \pmod p$.
(wskazówka: pomnóż kongruencję obustronnie przez 2)

Zadanie 7.7. Niech p będzie liczbą pierwszą, $p \equiv 2 \pmod 3$. Wykaż, że dla dowolnego $a \in \mathbb{Z}$ istnieje $b \in \mathbb{Z}$ takie, że $a \equiv b^3 \pmod p$.

7.2 Funkcja Eulera

Zadanie 7.8. Policz: $\varphi(55), \varphi(125), \varphi(375)$.

Zadanie 7.9. Oblicz liczbę właściwych ułamków nieskracalnych o mianowniku 55.

Zadanie 7.10. Pokaż, że:

(a) $\varphi(4n + 2) = \varphi(2n + 1)$,

(b) $\varphi(4n) = \begin{cases} 2\varphi(n), & \text{gdy } 2 \nmid n, \\ 2\varphi(2n), & \text{gdy } 2 | n. \end{cases}$

Zadanie 7.11. Wykaż, że $\varphi(n) = n - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

Zadanie 7.12. Znaleźć liczbę naturalną a, jeśli $\varphi(a) = 3600$ oraz jedynymi dzielnikami pierwszymi a są: $3, 5, 7$.

7.3 Twierdzenie Eulera

Zadanie 7.13. Znajdź resztę z dzielenia:

(a) 317^{259} przez 15,

(b) 6^{1000} przez 8,

(c) 7^{67} przez 12,

(d) $2^{1000000}$ przez 77.

Zadanie 7.14. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$:

(a) $30 | n^5 - n$,

(b) $15|n^7 - n^5 - n^3 + n$.

Zadanie 7.15. Wykaż, że $11 \cdot 33|2^{330} - 1$.

Zadanie 7.16. Znajdź resztę z dzielenia:

(a) 24^{804} przez 320,

(b) 15^{432} przez 33,

(c) 21^{170} przez 98.

8 Teoria grup

8.1 Definicja grupy

Zadanie 8.1. Ile różnych działań można określić na zbiorze:

(a) 2-elementowym?

(b) 3-elementowym?

(c) n-elementowym?

Zadanie 8.2. Czy następujący zbiór jest grupą z podanym działaniem? Czy jest to grupa abelowa?

(a) $G = \mathbb{Q}$, $a \star b = \frac{1}{2}(a+b)$,

(b) $G = \mathbb{Z}$, $a \star b := a^b$,

(c) $G = \mathbb{Q}_{>0}$, $a \star b := \sqrt{a \cdot b}$,

(d) $G = \mathbb{R}_{>0}$, $a \star b := \sqrt{a \cdot b}$,

(e) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = ax + b, \text{ gdzie } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ z działaniem składania funkcji,

(f) $G = \mathbb{Z}[\frac{1}{3}] := \{\frac{a}{3^k} : a, k \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem dodawania,

(g) $G = [0; 1]$, $x \star y := x + y - [x + y]$,

(h) $G = \{5^k : k \in \mathbb{Z}\}$ wraz z działaniem dodawania,

(i) $G = \{5^k : k \in \mathbb{Z}\}$ wraz z działaniem mnożenia,

(j) $G = (1; \infty)$ z działaniem $a \star b := ab - a - b + 2$,

(k) $G = 5\mathbb{Z}$ (liczby podzielne przez 5) z działaniem dodawania,

(l) $G = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z działaniem dodawania,

(m) $G = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z działaniem mnożenia.

Zadanie 8.3. Niech G będzie grupą.

(a) Wykaż, że $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ dla dowolnych elementów grupy $a, b \in G$.

(b) Oblicz $(abc)^{-1}$ dla danych elementów a, b, c grupy G.

Zadanie 8.4. Wyznacz grupę izometrii kwadratu. Wskaż element neutralny i elementy odwrotne do wszystkich elementów.

Zadanie 8.5. Rozwiąż równanie $ax = b$ dla danych $a, b \in G$.

Zadanie 8.6. Niech e będzie elementem neutralnym grupy G. Wykaż, że jeśli $a^2 = e$ dla dowolnego elementu $a \in G$, to grupa G jest przemienna. Czy jeżeli grupa G jest przemienna, to $a^2 = e$ dla dowolnego elementu a?

Zadanie 8.7. Niech G będzie grupą. Udowodnij, że równość $(ab)^2 = a^2 \cdot b^2$ zachodzi dla wszystkich $a, b \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest abelowa.

Zadanie 8.8. Niech G będzie grupą, zaś $g, h \in G$. Oblicz $(ghg^{-1})^n$.

8.2 Podgrupy

Zadanie 8.9. Czy zbiór $\{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$ jest podgrupą grupy $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$?

Zadanie 8.10. Znajdź wszystkie podgrupy grupy:

(a) $\mathbb{Z}/5$,

(b) $\mathbb{Z}/8$,

(c) $\mathbb{Z}/12$,

(d) $\Phi(8)$,

(e) $\Phi(5)$.

Zadanie 8.11. Czy zbiory:

(a) $H_1 = \{f = ax : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$,

(b) $H_2 = \{f = x + b : b \in \mathbb{R}\}$,

(c) $H_3 = \{f = -x + b : b \in \mathbb{R}\}$

są podgrupami grupy $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ (z działaniem składania funkcji)?

8.3 Izomorfizmy i homomorfizmy

Zadanie 8.12. Czy grupa $G = (1; \infty)$ z działaniem $a \star b := ab - a - b + 2$ jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$?

Zadanie 8.13. Które z poniższych grup są izomorficzne z $\mathbb{Z}/6$?

$\Phi(7)$, $\Phi(9)$, grupa izometrii trójkąta równobocznego, $\Phi(12)$

Zadanie 8.14. Które z poniższych grup są izomorficzne z $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$?

$(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$, $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$

Zadanie 8.15. Czy grupa $2\mathbb{Z}$ jest izomorficzna z grupą $\mathbb{Z}$?

Zadanie 8.16. Niech G będzie grupą izometrii rombu niebędącego kwadratem. Czy $G \cong \mathbb{Z}/4$?

Zadanie 8.17.

Czy grupa $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ jest izomorficzna z $(\mathbb{Q}, +)$?

(Wsk. załóżmy, że $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+$ jest izomorfizmem i niech $g(x_0) = 2$ dla pewnego x_0. Skorzystaj z tego, że 2 nie jest kwadratem liczby wymiernej)

Zadanie 8.18. Czy dana funkcja $f : G \to H$ jest homomorfizmem grup?

(a) $G = H = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$,

(b) $G = H = \mathbb{R}^\times, \quad f(x) = x^2$,

(c) $G = \{g(x) = ax + b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, a \neq 0\}$, $H = \mathbb{R}^\times, \quad f(ax + b) = a$,

(d) $G = \mathbb{R}^\times$, $H = (0; \infty), \quad f(x) = |x|$,

(e) $G = \mathbb{Z}$, $H = \mathbb{Z}/n, \quad f(x) = r_n(x)$.

Zadanie 8.19. Niech G będzie grupą. Rozważmy funkcję $f : G \to G$, $f(g) = g^{-1}$. Wykaż, że f jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G jest abelowa.

9 Grupy symetrii

Zadanie 9.1. Oblicz σ^{-1}, $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$ dla:

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

(b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Zadanie 9.2. Zapisz w postaci dwuwierszowej:

(a) $\sigma = (4, 1, 3) \in S_4$,

(b) $\sigma = (2, 5, 6, 4, 3, 1) \in S_7$.

Zadanie 9.3. Zapisz podaną permutację w postaci iloczynu cykli oraz iloczynu transpozycji. Czy podana permutacja jest parzysta?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Zadanie 9.4. Oblicz σ^2, σ^3, σ^{-1} dla permutacji z poprzedniego punktu.

Zadanie 9.5. Rozwiąż równanie:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ (1, 4, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Zadanie 9.6. Określ parzystość permutacji:

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \dots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$

(b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n & 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$,

(c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 9.7. Na długim drucie siedzą trzy koniki polne: Arkadiusz, Bonifacy i Czesław. Raz na minutę jeden z nich przeskakuje przez siedzącego obok (np. na początku B może przeskoczyć przez A lub C, a A tylko przez B). Czy po parzystej liczbie skoków koniki polne mogą ustawić się w kolejności C, B, A?

Zadanie 9.8.

(a) Na półce stoją książki, które chcemy poukładać alfabetycznie. Czy możemy to zrobić, zamieniając skończenie wiele razy miejscami po dwie (niekoniecznie sąsiednie) książki?

(b) Jakich zamian trzeba dokonać w przypadku, gdy książki są poukładane następująco: 3175624 (numer to kolejność książki w porządku alfabetycznym)?

10 Liczby zespolone

10.1 Podstawowe własności

Zadanie 10.1. Oblicz:

(a) $(3 + 2i) - (\sqrt{2} - i)$,

(b) $(2 - 3i) \cdot (1 + 3i)$,

(c) $(2 - 3i) : (1 + 3i)$,

(d) $|2 - 3i|$.

Zadanie 10.2. Rozwiąż równanie:

(a) $z^2 - 4z + 5 = 0$,

(b) $4z + (1 - i)\overline{z} = 9 - 3i$,

(c) $(z + i) \cdot (\overline{z} - i) + z - \overline{z} = -2i$,

(d) $\frac{z+i}{\overline{z}-i} = 5i$.

Zadanie 10.3. Wykaż, że:

(a) $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$,

(b) $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$,

(c) $z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,

(d) $z = -\overline{z} \quad \Leftrightarrow z = i \cdot b$ dla $b \in \mathbb{R}$,

(e) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \cdot (|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Zadanie 10.4. Podaj interpretację geometryczną zbioru:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 2\}$,

(b) $\{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z - 1| < 4\}$,

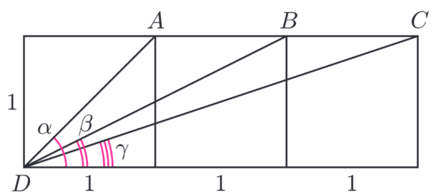
(c) $\{z \in \mathbb{C} : |\frac{z-5}{z-1}| = 1\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{Im}(z) < 3\}$,

(e) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| > |z + i|\}$,

(f) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| + |z + 1 + i| = 2\sqrt{2}\}$.

Zadanie 10.5. Wykaż, korzystając z liczb zespolonych, że $\alpha + \beta + \gamma = 90^o$.



Zadanie 10.6. Wykaż, że jeżeli $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| = |z_2| = 1$, to $\frac{z_1+z_2}{1+z_1 \cdot z_2} \in \mathbb{R}$.

10.2 Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych

Zadanie 10.7. Zapisz w postaci trygonometrycznej liczby: -12, $-1+i$, $-1-i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+i$.

Zadanie 10.8. Oblicz ze wzoru de Moivre'a:

(a) $(-1+i)^{45}$,

(b) $(-1-i\sqrt{3})^{76}$,

(c) $(\sqrt{3}+i)^{2020}$.

Zadanie 10.9. Oblicz $\sqrt{8-6i}$, $\sqrt{1+4i\sqrt{5}}$.

Zadanie 10.10. Rozwiąż równania w $\mathbb{C}$:

(a) $x^6 = 27$,

(b) $x^2 = -3i$,

(c) $x^4 = -1$,

(d) $x^8 = 1$,

(e) $x^3 = -7$.

Zadanie 10.11. Niech $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ będą n-tymi pierwiastkami z jedności. Wykaż, że:

(a) $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k = 0$,

(b) $\prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k = (-1)^{n-1}$.

Zadanie 10.12. Korzystając ze wzorów de Moivre'a, wykaż tożsamości trygonometryczne:

(a) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$,

(b) $\sin 4x = 4\sin x \cos x(1 - 2\sin^2 x)$.

Zadanie 10.13. Korzystając ze wzorów $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, wykaż tożsamości:

(a) $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$,

(b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

(c) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$,

(d) $\sin 4x = 4\sin x \cos x(1 - 2\sin^2 x)$,

(e) $\sum_{k=1}^{n} r^k \cdot \sin(k \cdot x) = \frac{r \cdot \sin x - r^{n+1}\sin((n+1)x) + r^{n+1}\sin(nx)}{1 - 2r\cos x + r^2}$.

Zadanie 10.14. Rozłóż wielomian $x^4 - 1$ na iloczyn nierozkładalnych wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.