

8 Macierz przekształcenia liniowego

Zadanie 8.1. Wyznaczyć współrzędne wektora:

- (a) $v = (1, -2, 0)$,
 (b) $v = (0, 1, 2)$

w bazie $B = ((1, 3, 4), (0, 1, 2), (0, 0, -1))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 8.2. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi danymi wzorami:

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1 + 3x_2 + x_3, 5x_1 + 4x_2 + 2x_3), \quad \psi((x_1, x_2)) = (3x_1 - x_2, 5x_1 - 3x_2, 7x_1 - 5x_2).$$

Wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego φ , ψ , $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$.

Zadanie 8.3 (zad. 262, 263, 296, JR). Niech φ będzie przekształceniem liniowym. Wyznaczyć macierz $M_{BC}(\varphi)$ przekształcenia φ w bazach B i C , gdzie:

- (a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2)) = (4x_1 - x_2, 7x_1 - 3x_2)$, $B = ((2, 1), (4, 7))$, $C = ((1, 1), (0, 1))$,
 (b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 - x_3)$, $B = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$, $C = ((1, 4), (1, 5))$,
 (c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$, $B = ((1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 1, 0))$,
 $C = ((0, -1, 0), (1, 2, 0), (0, 0, 2))$,
 (d) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2)) = (4x_1 + x_2, 7x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$, $B = ((1, 4), (2, 7))$, $C = ((-1, 9, 0), (2, 0, 5), (0, 7, 2))$.

Zadanie 8.4. Wyznaczyć współrzędne $\varphi(v)$ w bazie C , wykorzystując macierze otrzymane w odpowiednich podpunktach zadania 8.3, gdzie:

- (a) $v = (6, 8)$;
 (b) $v = (0, 0, 2)$;
 (c) $v = (2, 1, -1)$;
 (d) $v = (1, 3)$.

Zadanie 8.5. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ w bazach B i C , gdzie:

(a) $V = (\mathbb{Z}/7)^3$, $W = (\mathbb{Z}/7)^2$, $\varphi \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} , x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}$, $B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$, $C = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}[x]_4$, $\varphi \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \right) = (a_1 + a_2)x^4 + (-a_2 + 2a_3)x^3 + (-a_1 + 2a_2 - a_3)x^2 + a_1x + (a_1 + a_2 - a_3)$,
 $B = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, $C = (1, x^3, x^4, x^2, x)$;

(c) $V = \mathbb{R}[x]_4$, $W = \mathbb{R}[x]_4$, $\varphi(f(x)) = f'(x)$, $B = (x, 1, x^3, x^2, x^4)$, $C = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$;

(d) $V = \mathbb{R}[x]_3$, $W = \mathbb{R}[x]_2$, $\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_0x^2 + (a_1 + a_2)x + a_3$, $B = (x^3, x^2, x, 1)$,
 $C = (x^2, x, 1)$.

Zadanie 8.6 (zad. 264, 265, JR). Niech φ będzie przekształceniem liniowym danym przez macierz $M_{BC}(\varphi)$. Znaleźć wzór:

(a) $\varphi((x_1, x_2))$, gdzie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$, $B = C = ((1, 0), (0, 1))$,

(b) $\varphi((x_1, x_2))$, gdzie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = ((5, 1), (11, 2))$, $C = ((1, 1), (4, 3))$,

- (c) $\varphi((x_1, x_2, x_3))$, gdzie $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$, $B = ((5, 4, 2), (1, 1, 0), (2, 2, 1))$, $C = ((3, 1), (2, 1))$.

Zadanie 8.7 (zad. 268, 269, JR). Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym. Znaleźć bazę:

- (a) C , gdy mamy dane: wzór przekształcenia $\varphi((x_1, x_2)) = (3x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$, macierz $M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ oraz bazę $B = ((5, 4), (3, 2))$,
- (b) B , gdy mamy dane: wzór przekształcenia $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, 4x_1 + x_2)$, macierz $M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ oraz bazę $C = ((-1, 6), (0, 5))$.

Zadanie 8.8 (zad. 292, JR). Przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane jest przez macierz

$$M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Znaleźć macierz } M_{B'C'}(\varphi), \text{ gdy:}$$

- (a) $B = ((4, 5, 1), (1, 1, 1), (3, 0, 5)), \quad C = ((4, 4), (-4, -5)),$
 $B' = ((6, 4, 5), (4, 1, 6), (5, 2, 7)), \quad C' = ((0, 1), (4, 3)).$
- (b) $B = ((4, 4, 1), (3, 0, 1), (4, 3, 1)), \quad C = ((1, 2), (2, -1)),$
 $B' = ((4, 4, 1), (5, 8, 1), (3, 1, 1)), \quad C' = ((3, 1), (-5, 0)).$

Zadanie 8.9 (zad. 293, JR). Endomorfizm φ przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ ma w bazie kanonicznej macierz

$$M(\varphi) = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Znaleźć macierz tego endomorfizmu w bazie } B, \text{ gdzie:}$$

- (a) $B = ((1, 0), (-1, 1));$
- (b) $B = ((7, 5), (6, 3)).$

9 Jądro i obraz przekształcenia liniowego; przestrzeń ilorazowa

Zadanie 9.1 (zad. 245, JR). Sprawdzić, że jądro przekształcenia liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V .

Zadanie 9.2 (zad. 247, JR). Sprawdzić, że obraz przekształcenia liniowego $\varphi : V \rightarrow W$ jest podprzestrzenią przestrzeni W .

Zadanie 9.3 (zad. 246, JR). Wykazać, że przekształcenie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Ker } \varphi = \{\theta_V\}$.

Zadanie 9.4 (zad. 248, JR). Sprawdzić, że jeśli funkcja $\varphi : V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym i $V = L(v_1, \dots, v_n)$, to $\text{Im } \varphi = L(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$.

Zadanie 9.5 (zad. 252, JR). Znaleźć po jednej bazie jądra i obrazu przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, którego wartość w dowolnym punkcie $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ jest równa:

- (a) $(x_1 - 3x_2 - 5x_3, x_1 - 3x_2 - 5x_3, x_1 - 3x_2 - 5x_3, x_1 - 3x_2 - 5x_3)$,
- (b) $(x_1 + 2x_2 + 4x_3, 3x_1 + x_2 + 7x_3, 2x_1 + 5x_2 + 9x_3, 6x_2 + 6x_3)$,
- (c) $(x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3, 3x_1 - x_2 + 4x_3, 4x_1 - 2x_2)$.

Zadanie 9.6 (zad. 254, JR). Wypisać wszystkie elementy podanej przestrzeni ilorazowej, znaleźć bazę podanej przestrzeni ilorazowej oraz zbudować tabelki działań w podanej przestrzeni ilorazowej:

- (a) $(\mathbb{Z}/2)^3/W$, gdzie $W = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}$;
- (b) $(\mathbb{Z}/3)^2/W$, $W = L((1, 2))$.

Zadanie 9.7 (zad. 255, 256, JR). Opisać warstwy przestrzeni wektorowej V względem jej podprzestrzeni W . Korzystając z I twierdzenia o izomorfizmie, pokazać, że $V/W \cong V'$, gdzie:

- (a) $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in V : a_2 = 0\}$, $V' = \mathbb{R}$;
- (b) $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in V : a_1 = 4a_2 = 5a_3\}$, $V' = \mathbb{R}^2$;
- (c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \{[a_{ij}] \in V : a_{12} = a_{21} = 0\}$, $V' = \mathbb{R}^2$;
- (d) $V = C_{[0;1]}$, $W = \{f \in V : f(0) = f(1) = 0\}$, $V' = \mathbb{R}^2$.

10 Wektory własne, wartości własne i przestrzenie własne

Zadanie 10.1. Wyznacz wektory i wartości własne endomorfizmu $f : V \rightarrow V$, jeśli

- (a) $V = \mathbb{R}^3$ oraz $f((x, y, z)) = (x - y - z, 2y - z, 3z)$;
- (b) $V = \mathbb{R}^3$ oraz $f((x, y, z)) = (-3x - 2y - 4z, 2x + 7y + 10z, x - 2y - 2z)$;
- (c) $V = \mathbb{Q}^3$ oraz $f((x, y, z)) = (3x - y + z, 2x + z, 2x - 2y + 3z)$;
- (d) $V = \mathbb{C}^2$ oraz $f((x, y)) = (x - y, x + y)$;
- (e) $V = (\mathbb{Z}/5)^2$ oraz $f((x, y)) = (2x + 4y, x + 4y)$;
- (f) $V = \mathbb{R}[X]_4$ oraz $f(\varphi(x)) = \varphi'(x)$.

Zadanie 10.2. Niech $n \geq 2$ i $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K$. Wyznacz wielomian charakterystyczny dla macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Wywnioskuj, że dowolny unormowany wielomian $f \in K[X]$ stopnia n jest wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy $A \in M_n(K)$.

Zadanie 10.3. Podaj przykład takiej macierzy $A \in M_n(K)$, że

- (a) $A \in M_4(\mathbb{R})$ i A nie ma wartości własnych.
- (b) $A \in M_4(\mathbb{R})$ ma tylko jedną wartość własną i nie jest macierzą jednostkową pomnożoną przez skalar.
- (c) $A \in M_3(\mathbb{Q})$ i A nie ma wartości własnych.
- (d) $A \in M_5(\mathbb{R})$ ma dokładnie dwie różne wartości własne.

Zadanie 10.4. Dla wartości własnych podanych macierzy (nad $\mathbb{R}$) wyznacz krotność algebraiczną oraz krotność geometryczną

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 \\ 9 & -7 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10.5. Niech $\lambda \in K$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in M_n(K)$$

Wykaż, że λ jest wartością własną macierzy A oraz oblicz jej krotność algebraiczną i geometryczną.

Zadanie 10.6. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne endomorfizmu

$$\varphi : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2,$$

danego wzorem:

$$\varphi(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x^2 + (a_2 + 5a_1 - 3a_0)x - 3a_1 + 5a_0.$$

Czy macierz tego przekształcenia jest diagonalizowalna (czy da się sprowadzić do postaci diagonalnej)?

Zadanie 10.7 (zad. 321, JR). Zbadać, czy macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(K)$ jest diagonalizowalna, jeśli ciało K jest następujące:

- (a) $\mathbb{Q}$;
- (b) $\mathbb{R}$;
- (c) $\mathbb{C}$;
- (d) $\mathbb{Z}/5$;
- (e) $\mathbb{Z}/7$;
- (f) $\mathbb{Z}/11$.

Zadanie 10.8 (zad. 322, JR). Znaleźć macierz diagonalną D podobną do danej macierzy $A \in M_3(\mathbb{R})$, jeśli taka macierz D istnieje. Znaleźć też wtedy macierz odwracalną S taką, że $D = S^{-1}AS$, gdzie macierz A jest postaci:

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix};$ | (d) $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix};$ | (g) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \\ 6 & -5 & 3 \end{bmatrix};$ |
| (b) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix};$ | (e) $\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix};$ | (h) $\begin{bmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 8 & -7 & 1 \\ 8 & -8 & 1 \end{bmatrix};$ |
| (c) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix};$ | (f) $\begin{bmatrix} -7 & 2 & 6 \\ -4 & 2 & 3 \\ -8 & 2 & 7 \end{bmatrix};$ | (i) $\begin{bmatrix} -11 & 5 & 5 \\ -12 & 5 & 6 \\ -12 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ |

Zadanie 10.9. Niech $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} -7 & 2 & 6 \\ -4 & 2 & 3 \\ -8 & 2 & 7 \end{bmatrix}^n$$

Zadanie 10.10. Udowodnij, że przestrzeń $W = L(w_1, \dots, w_n)$ jest T -niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy $T(w_j) \in W$ dla każdego $j = 1, 2, \dots, n$.

Zadanie 10.11. Sprawdzić, czy W jest T -niezmienniczą podprzestrzenią w V :

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}$, $T(x, y, z) = (x + 3y + 3z, -3x - 5y - 3z, 3x + 3y + z)$;
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = L((1, 0, -1), (1, -1, 1))$, $T(x, y, z) = (x - y - z, 2x - y, 3z)$;
- (c) $V = \mathbb{R}^3$, $W = L((1, -1, 1), (1, 1, -1))$, $T(x, y, z) = (-3x - 2y - 4z, 2x + 7y + 10z, x - 2y - 2z)$;
- (d) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \{A \in V : A^T = A\}$, $T(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$;

Zadanie 10.12. Znaleźć wszystkie jednowymiarowe podprzestrzenie T -niezmiennicze w $\mathbb{R}^3$ dla operatora:

$$T(x, y, z) = (x - 4y + z, -4x + y + z, 4x + 4y + 4z).$$

11 Formy dwuliniowe, radykał lewostronny i prawostronny

Zadanie 11.1 (BG t.II, zad. 14.1). Które z następujących przekształceń są formami dwuliniowymi?

(a) $\beta : K^3 \times K^3 \rightarrow K$, $\beta(v, w) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$;

(b) $\beta : K^n \times K^n \rightarrow K$, $\beta(v, w) = \sum_{j=1}^n jx_jy_j$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$;

(c) $\beta : K^4 \times K^4 \rightarrow K$, $\beta(v, w) = x_1y_4 + x_2y_3$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$;

(d) $\beta : K^4 \times K^4 \rightarrow K$, gdzie $\beta(v, w) = x_1y_2 + x_2^2 + x_2y_3$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$, $\text{char } K \neq 2$.

Zadanie 11.2 (BG t.II, zad. 14.2). Znaleźć macierze następujących form dwuliniowych:

(a) $\beta : K^3 \times K^3 \rightarrow K$, $\beta(v, w) = x_1y_2 - 2x_2y_3 + 6x_3y_1$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$;

(b) $\beta : K^4 \times K^4 \rightarrow K$, gdzie $\beta(v, w) = 4x_1y_1 + 3x_2y_4 - 6x_3y_4 + 5x_3y_1 - 9x_4y_2 + 3x_2y_3$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$;

(c) $\beta : K^3 \times K^3 \rightarrow K$, gdzie $\beta(v, w) = -3x_3y_1$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

Zadanie 11.3 (zad. 419, JR). Metodami poznanymi na wykładzie (tj. z definicji oraz korzystając z macierzy przejścia od bazy do bazy), znaleźć macierz formy dwuliniowej $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, danej wzorem:

$$\beta \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = 4x_1y_1 + 7x_1y_2 + 5x_2y_1 + 9x_2y_2$$

w bazie B , gdzie:

(a) $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$;

(b) $\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \right)$;

(c) $\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$;

(d) $\left(\begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix} \right)$.

Zadanie 11.4 (BG t.II, zad. 14.3). Znaleźć $\text{rad}_L \beta$, i $\text{rad}_P \beta$ dla następujących form dwuliniowych:

(a) $\beta : K^2 \times K^2 \rightarrow K$, $\beta(v, w) = x_1 y_2$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$;

(b) $\beta : K^3 \times K^3 \rightarrow K$, $\beta(v, w) = x_1 y_1 + x_3 y_3$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$;

(c) $\beta : K^4 \times K^4 \rightarrow K$, $\beta(v, w) = 2x_1 y_1 + x_1 y_3 - 2x_3 y_4 + 3x_4 y_2$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$, $\text{char } K \neq 2, 3$.

Zadanie 11.5 (BG t.II, zad. 14.4). Znaleźć wszystkie macierze $A \in M_n(K)$ takie, że forma dwuliniowa:

$$\beta(v, w) = v^T A w$$

ma własność

$$\beta(Bv, w) = \beta(v, B^T w),$$

dla każdego $B \in M_n(K)$.

Zadanie 11.6 (BG t.II, zad. 14.6). Niech $A \in M_n(K)$. Wykazać, że jeśli $A \in \text{GL}_n(K)$, to $\text{rad}_L \beta = \text{rad}_P \beta = \{\theta_n\}$, dla formy dwuliniowej:

$$\beta : K^n \times K^n \rightarrow K, \quad \beta(v, w) = v^T A w.$$

Zadanie 11.7 (BG t.II, zad. 14.7). Wykazać, że forma dwuliniowa:

$$\beta : K^n \times K^n \rightarrow K, \quad \beta(v, w) = v^T A w, \quad A \in M_n(K)$$

ma tę własność, że jeśli $\text{rad}_L \beta = \{\theta_n\}$ lub $\text{rad}_P \beta = \{\theta_n\}$, to $A \in \text{GL}_n(K)$.

12 Iloczyn skalarny, algorytm Grama-Schmidta

Zadanie 12.1 (zad. 438, JR). Sprawdzić, czy funkcja $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określona danym wzorem jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^2$:

(a) $\beta \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2;$

(b) $\beta \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = 3x_1 y_1 + 4x_1 y_2 + 4x_2 y_1 + 5x_2 y_2;$

(c) $\beta \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2.$

Zadanie 12.2 (zad. 445, JR). Wykazać, że w dowolnej przestrzeni euklidesowej równość:

$$\|v\| = \|w\|$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $v + w \perp v - w$.

Zadanie 12.3 (zad. 446, JR). Wykazać, że w dowolnej przestrzeni euklidesowej równość:

$$\|v + w\| = \|v - w\|$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $v \perp w$.

Zadanie 12.4 (zad. 447, JR). W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

obliczyć kąt między danymi wektorami:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Zadanie 12.5 (zad. 448, JR). W przestrzeni euklidesowej $C_{[-1;1]}$ z iloczynem skalarnym:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

obliczyć kąt daną parą funkcji:

(a) $f(x) = \sin(\pi x), g(x) = \cos(\pi x);$

(b) $f(x) = x^2, g(x) = x + \sqrt{3}.$

Zadanie 12.6 (zad. 450, JR). Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wykazać, że dla dowolnych $v, v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ warunek $v \perp L(v_1, v_2, \dots, v_n)$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $v \perp v_i$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Zadanie 12.7 (zad. 452, JR). Niech

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ z kanonicznym iloczynem skalarnym. Znaleźć jedną z baz przestrzeni $W^\perp$.

Zadanie 12.8 (zad. 453, JR). Sprawdzić, że dla dowolnej przestrzeni euklidesowej V zachodzą równości $\{\theta_V\}^\perp = V$ i $V^\perp = \{\theta_V\}$.

Zadanie 12.9 (zad. 462, JR). Stosując algorytm Grama-Schmidta, znaleźć bazę ortonormalną danej podprzestrzeni przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ z kanonicznym iloczynem skalarnym:

(a) $L \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right);$

(b) $L \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \right);$

(c) $L \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$

Zadanie 12.10 (zad. 465, JR). Wyznaczyć rzut prostopadły wektora v na podprzestrzeń W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ z kanonicznym iloczynem skalarnym, gdzie:

(a) $v = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad W = L \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right);$

(b) $v = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad W = L \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right);$

(c) $v = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad W = L \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$

Zadanie 12.11 (zad. 466, JR). Podprzestrzeń W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^5$ z kanonicznym iloczynem skalarnym określona jest następująco:

$$W = L \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Nie wyznaczając bazy ortonormalnej podprzestrzeni W , znaleźć rzut prostopadły w wektora

$v = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$ na podprzestrzeń W .

Zadanie 12.12 (zad. 467, JR). Niech $V = \mathbb{R}^4$ (przestrzeń euklidesowa z kanonicznym iloczynem skalarnym),

$W = L \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right), v = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć rzut prostopadły wektora v na podprzestrzeń $W^\perp$.

13 Formy kwadratowe

Zadanie 13.1 (zad. 428, 429, JR). Znaleźć macierz dla następujących form kwadratowych.

- (a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 21x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;
- (b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- (c) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 3x_1x_3 + 5x_2x_3$;
- (d) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3$;
- (e) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 19x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_4 + 4x_2x_3 + 8x_2x_4 - 8x_3x_4$;
- (f) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Zadanie 13.2. Stosując metodę Lagrange’a doprowadzić formy kwadratowe z Zadania 13.1 do postaci kanonicznej oraz podać macierze, które dają podstawienia zmiennych, by otrzymać z form z Zadania 13.1 formy diagonalne.

Zadanie 13.3 (zad. 431, JR). Stosując metodę Jacobiego doprowadzić formę kwadratową q do postaci kanonicznej. Podać macierz, która daje podstawienie zmiennych, by otrzymać z formy q formę diagonalną.

- (a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 14x_2x_3$;
- (b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 16x_2x_3$;
- (c) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 8x_2^2 - 8x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 - 14x_2x_3$;
- (d) $q(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 8x_2x_3$;
- (e) $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 10x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- (f) $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Zadanie 13.4 (zad. 435, JR). Korzystając z definicji oraz kryterium Sylwestera sprawdzić, czy poniższe formy są dodatnio określone.

- (a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$
- (b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$

Zadanie 13.5. Sprawdzić, czy następujące formy kwadratowe są dodatnio/ujemnie określone:

- (a) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$;
- (b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 9x_2^2 + 12x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$;
- (c) $q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 10x_2^2 - 10x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;
- (d) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 9x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;
- (e) $q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 14x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 10x_2x_3$;
- (f) $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3$;
- (g) $q(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;
- (h) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 21x_2^2 + 13x_3^2 - 12x_1x_2 + 12x_2x_3$;

Zadanie 13.6 (zad. 436, JR). Obliczyć, dla jakich wartości parametru λ forma kwadratowa q dana wzorem $q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$ jest dodatnio określona.

14 Postać kanoniczna Jordana

Stwierdzenie 14.1. *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_r \end{bmatrix} \in M_n(K),$$

gdzie $A_1, A_2, \dots, A_r$ są dowolnymi kłatkami kwadratowymi, natomiast litery O oznaczają macierze zerowe odpowiednich wymiarów. Niech $f(x) \in K[x]$. Wówczas:

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(A_1) & O & \dots & O \\ O & f(A_2) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & f(A_r) \end{bmatrix}.$$

Stwierdzenie 14.2. *Niech $f(x) \in K[x]$ oraz $\text{char } K = 0$. Niech:*

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} \in M_n(K).$$

Wówczas

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(a) & f'(a) & \frac{1}{2!}f''(a) & \dots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(a) & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) \\ 0 & f(a) & f'(a) & \dots & \frac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(a) & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(a) & f'(a) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(a) \end{bmatrix}$$

Zadanie 14.1 (zad. 349, 350, JR). Znaleźć postać Jordana B oraz wielomian minimalny $q_A(t)$ danej macierzy $A \in M_n(\mathbb{C})$ oraz taką macierz $C \in GL_n(\mathbb{C})$, by zachodziła równość $B = C^{-1}AC$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$	(e) $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix};$	(h) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix};$
(b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 \\ 8 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix};$	(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 5 & -6 \\ 8 & 4 & -5 \end{bmatrix};$	(i) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix};$
(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix};$	(g) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -7 & 8 \end{bmatrix};$	(j) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$
(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix};$		

Zadanie 14.2 (zad. 337, 338, JR). Niech $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć A^n :

(a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix};$

(b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix};$

(c) $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix};$

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Zadanie 14.3 (zad. 351, JR). Niech $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć n -tą potęgę danej macierzy:

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$

(b) $A = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ -13 & -12 \end{bmatrix};$

(c) $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$