4 Przestrzeń, podprzestrzeń, kombinacje liniowe wektorów, powłoka liniowa, liniowa zależność wektorów

4.1 Zadania

Zadanie 4.1 (zd)**.** Czy zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem?

Zadanie 4.2 (zd*)**.** Udowodnić, że charakterystyka ciała jest liczbą pierwszą lub jest równa 0.

Zadanie 4.3 (zd*)**.** Wyznaczyć charakterystykę ciała K, gdzie $\mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} = 0$.

Zadanie 4.4 (zd)**.** Obliczyć:

(a) $-\frac{1}{4} + 2$ w $\mathbb{Z}/5$,
(b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ w $\mathbb{Z}/7$.

Zadanie 4.5 (zd)**.** Wykazać, że jeśli $\operatorname{char} K = p > 0$, to $(a + b)^p = a^p + b^p$, dla dowolnych $a, b \in K$.

Zadanie 4.6. Czy struktura $\langle V, \oplus, \odot\rangle$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie:
$V = \mathbb{R}_{>0}$ oraz $\oplus : \ V \times V \to V$, $\odot : \ \mathbb{R} \times V \to V$ zdefiniowane są wzorami:

$$v \oplus w := vw, \qquad \alpha \odot v := v^\alpha, \qquad \text{dla dowolnych } v, w \in V \text{ oraz } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 4.7. Rozpatrując iloczyn $(\mathbf{1}+\mathbf{1})\bullet(v+w)$, gdzie $v, w \in V$ uzasadnić, że w aksjomatach przestrzeni liniowej słowo abelowa można opuścić.

Zadanie 4.8. Czy struktura $\langle V, +, \odot\rangle$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie:
$V := \mathbb{R}^2$ oraz $+ : \ V \times V \to V$, $\odot : \ \mathbb{R} \times V \to V$ zdefiniowane są wzorami:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\alpha \odot (x_1, x_2) := (\alpha x_1, x_2),$$

dla dowolnych $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.9. Sprawdzić, czy $W < V$, gdzie:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0\}$,
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y = 0\}$,
(c) $V = \operatorname{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ jest funkcją}\}$, $W = \{f \in \operatorname{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ f \text{ jest ograniczona}\}$,
(d) $V = \operatorname{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ jest funkcją}\}$, $W = \{f \in \operatorname{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ f(x) \in \mathbb{Q}, \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}\}$,
(e) $V = C_{[0,1]} := \{f : \ [0, 1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ jest funkcją ciągłą}\}$, $W = \{f \in C_{[0,1]} : \ 2f(0) = f(1)\}$,
(f) $V = C_{[0,1]} := \{f : \ [0, 1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ jest ciągła}\}$, $W = \{f \in C_{[0,1]} : \ \exists\, x \in [0, 1](f(x) = 0)\}$,
(g) $V = \mathbb{R}[x]$, $W = \{f \in \mathbb{R}[x] : \ f(0)f(1) = 0\}$,
(h) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$,
(i) $V = \mathbb{C}^n$, $W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : \ x_1 = \overline{x}_n\}$,
(j) $V = \mathbb{C}^n$, $W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : \ |x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n|\}$.

Zadanie 4.10. Obliczyć w przestrzeni $(\mathbb{Z}/5)^3$:

$$2 \cdot (1, 4, 3) + 4 \cdot (3, 1, 2) - (4, 2, 3).$$

Zadanie 4.11. Znaleźć wektor $v \in (\mathbb{Z}/7)^3$ spełniający następującą równość w tej przestrzeni:

$$3 \cdot v + (1, 2, 5) = (3, 4, 6).$$

Zadanie 4.12. Z ilu różnych wektorów składa się przestrzeń $(\mathbb{Z}/p)^n$, gdzie p jest liczbą pierwszą?

Część zadań pochodzi z materiałów opracowanych przez dra T. Werbińskiego

Zadanie 4.13. Czy wektor $(2,4,8)$ jest kombinacją liniową wektorów $(1,2,3),(3,7,5),(5,12,8)$ w $\mathbb{R}^3$. Jeśli jest, podać współczynniki tej kombinacji.

Zadanie 4.14. Sprawdzić, czy prawdziwa jest przynależność:

(a) $(8,9,11) \in L((3,1,4),(2,7,3))$ w $\mathbb{R}^3$,
(b) $(-2,0,-1,0) \in L((-1,1,-1,2),(0,1,-1,2),(2,-1,-1,-1),(1,3,0,-2))$ w $\mathbb{R}^4$,
(c) $(1,5,1,1) \in L((1,3,4,5),(1,4,6,3))$ w $(\mathbb{Z}/7)^4$,
(d) $(x,y,z,t) \in L((1,-1,1,-1),(0,0,1,-1),(i,1,-i,-1))$, gdzie $x+y+z+t=0$ oraz $t=-1$ w $\mathbb{C}^4$,
(e) $(7,6,4) \in L((3,4,2),(5,5,3))$ w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4.15. Sprawdzić, czy zachodzi równość w $\mathbb{R}^3$:

(a) $L((4,5,3),(5,7,5)) = L((6,9,7),(7,11,9))$,
(b) $L((1,6,5),(4,1,2)) = L((1,2,2),(5,2,4))$,
(c) $L((1,1,3),(2,5,0)) = L((1,2,1),(1,0,5),(2,1,8))$.

Zadanie 4.16. Pokazać, że jeśli $v_1+v_2+v_3=\theta$, to $L(v_1,v_2)=L(v_2,v_3)$.

Zadanie 4.17 (zd)**.** Sprawdzić czy dane wektory, generują przestrzeń $\mathbb{R}^n$:

(a) $(2,2),(-1,3)$, dla $n=2$,
(b) $(1,3,5),(1,4,7),(3,8,17)$, dla $n=3$,
(c) $(1,2,4),(7,6,4),(9,7,3)$, dla $n=3$,
(d) $(1,2,4),(3,5,9)$, dla $n=3$.

Zadanie 4.18. Sprawdzić, czy dane wektory przestrzeni V są liniowo zależne:

(a) $V=\mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $(3,-1,2),(-9,3,-6)$;
(b) $V=\mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $(4,4,1),(1,4,4)$;
(c) $V=\mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $(1,0,-4),(5,1,1),(1,1,0),(1,0,8)$;
(d) $V=(\mathbb{Z}/5)^3$ nad ciałem $\mathbb{Z}/5$, wektory: $(1,1,0),(4,3,1),(1,4,2)$;
(e) $V=C_{\mathbb{R}}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $1,\sin x,\cos x$;
(f) $V=C_{\mathbb{R}}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $1,2^x,3^x,6^x$;
(g) $V=C_{(0,\infty)}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $\log x,\log 2x,\log 3x$;

Zadanie 4.19. Wykazać, że dane wektory w przestrzeni $C_{\mathbb{R}}$ są liniowo niezależne:

(a) $1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\ldots$,
(b) $1,\sin x,\sin^2 x,\sin^3 x,\ldots$.

Zadanie 4.20 (zad. 62, JR)**.** Sprawdzić, czy każdy wektor przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej następującego układu wektorów:

(a) $(1,0,-1),(1,1,3),(4,1,1)$,
(b) $(3,3,5),(1,8,4),(2,7,5)$,
(c) $(1,3,4),(2,7,9)$,
(d) $(1,1,1),(1,2,3),(4,7,11),(3,4,7)$.

5 Baza i wymiar przestrzeni liniowej

5.1 Zadania

Zadanie 5.1. Czy wektory $w_1 = x - 5$, $w_2 = x^2 + 2x + 3$, $w_3 = x^2 + x + 1$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$?

Zadanie 5.2. Udowodnić, że wektory $1, x, x^2, \ldots, x^n$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$.

Zadanie 5.3. Wyznacz współrzędne wektora: $v = (1, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$ w bazie $((1, 0, -1), (-2, 1, 2), (0, -1, 1))$.

Zadanie 5.4 (zad. 68, JR)**.** Zbadać, czy następujące wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (wykorzystać fakt, że gdy $\dim_K V = n$, to n wektorów przestrzeni V tworzy jej bazę $\iff$ wektory te są liniowo niezależne):

(a) $(1, -1, 1), (1, 1, -1), (-1, 1, 1)$,
(b) $(1, 0, 1), (5, 1, 6), (8, -5, 3)$.

Zadanie 5.5 (zad. 69, JR)**.** Wyznacz jedną z baz podprzestrzeni W przestrzeni $\mathbb{R}^4$, gdzie:

(a) $W = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0, \quad 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\big\}$,
(b) $W = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0\big\}$,
(c) $W = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0\big\}$,
(d) $W = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 0, \ x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0\big\}$.

Zadanie 5.6 (zad. 76, JR)**.** Wskazać taką bazę podprzestrzeni W przestrzeni $\mathbb{R}^4$, która jest podukładem danego układu wektorów rozpinających podprzestrzeń W. Określić wymiar podprzestrzeni W.

(a) $W = L((1, 3, 3, 2), (3, 5, 6, 5), (8, 4, 9, 11), (5, 3, 6, 7))$,
(b) $W = L((1, 1, 3, 7), (3, 4, 9, 17), (1, 2, 5, 9), (4, 5, 9, 27))$,
(c) $W = L((1, 2, 0, 1), (4, 5, 1, 3), (5, 1, 3, 2), (1, -1, 1, 8))$.

Zadanie 5.7 (zad. 79, JR)**.** Dla podanych podprzestrzeni $W_1, W_2 < \mathbb{R}^4$ znaleźć bazę przestrzeni $W_1 \cap W_2$:

(a) $W_1 = L((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0))$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_2 - x_4 = 0\}$,
(b) $W_1 = L((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0))$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,
(c) $W_1 = L((1, 7, 7, 8), (2, 6, 5, 7))$, $W_2 = L((5, 7, -1, 8), (5, 8, -1, 9))$,
(d) $W_1 = L((1, 1, 4, 1), (3, 4, 9, 3))$, $W_2 = L((3, 4, 7, 6), (5, 7, 9, 9))$.

Zadanie 5.8 (zad. 87, JR)**.** Wiadomo, że $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$. Przedstawić dany wektor $v \in \mathbb{R}^4$ w postaci odpowiedniej sumy:

(a) $W_1 = L((0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1))$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 = x_2 - 5x_4 = 0\}$, $v = (7, 2, 15, 8)$,
(b) $W_1 = L((4, 0, 1, 0))$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_3 - 7x_4 = 0\}$, $v = (5, 6, 9, 1)$.

Zadanie 5.9 (zad. 88, JR)**.** Zbadać, czy dla danych podprzestrzeni $W_1, W_2 < \mathbb{R}^4$ prawdziwy jest związek $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$:

(a) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - x_3 = x_2 + x_3 = 0\}$, $W_2 = L((1, 1, 4, 1), (0, 1, 3, 0))$,
(b) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = x_2 - x_3 = 0\}$, $W_2 = L((4, 1, 0, 3), (5, 1, -1, 4))$.

Zadanie 5.10 (zad. 89, JR)**.** Podprzestrzenie W, W_1 i W_2 przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określone są następująco:
$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$, $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$, $W_2 = L((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$. Zbadać, czy $W = W_1 + W_2$ i czy suma algebraiczna $W_1 + W_2$ jest sumą prostą.

Zadanie 5.11 (zad. 97, JR)**.** Określone są podprzestrzenie $W_1, W_2 < \mathbb{R}^4$. Obliczyć wymiary podprzestrzeni $W_1, W_2, W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$, gdzie:

(a) $W_1 = L((2, 5, 0, -2))$, $W_2 = L((1, 7, 3, -4), (3, 0, -5, 2))$,
(b) $W_1 = L((1, 1, 1, 1))$, $W_2 = L((1, 0, 3, 1), (3, 5, 4, -2), (3, 4, 5, -1))$,

(c) $W_1 = L((1,1,0,0),(0,0,1,1))$, $W_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1+3x_2-x_3+x_4 = 3x_1+8x_2-4x_3+3x_4 = 0\}$,

(d) $W_1 = L((1,1,2,1),(6,1,1,3))$, $W_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1+5x_2+2x_3+7x_4 = 3x_1-4x_2+7x_3+5x_4 = 0\}$,

(e) $W_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1-x_2+x_4 = x_1+2x_3-x_4 = 0\}$,
$W_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1+x_2+x_3 = x_1+3x_2+x_3-x_4 = 0\}$.

Zadanie 5.12 (zad. 61, JR)**.** Dane są wektory $v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Wektory v_1, v_2 są liniowo niezależne ($\dim_{\mathbb{R}} L(v_1,v_2) = 2$), a $L(w_1,w_2,w_3,w_4) = \mathbb{R}^4$. Które z wektorów w_1,w_2,w_3,w_4 można dołączyć do wektorów v_1, v_2, by otrzymać bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

(a) $v_1 = (1,4,2,1), \ v_2 = (0,1,1,1)$
$w_1 = (1,1,0,0), \ w_2 = (2,4,1,0), \ w_3 = (1,0,0,2), \ w_4 = (2,5,3,4)$,

(b) $v_1 = (1,1,1,-1), \ v_2 = (5,2,4,1)$
$w_1 = (1,0,1,1), \ w_2 = (2,1,1,0), \ w_3 = (4,1,1,2), \ w_4 = (3,4,3,4)$.

Zadanie 5.13. Niech $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 - x_2 = x_4 - x_2 + 2x_3 = 0\} < \mathbb{R}^4$. Uzupełnić jedną z baz podprzestrzeni W do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 5.14 (zad. 71, JR)**.** Zbadać, dla jakich liczb $x \in \mathbb{R}$ dana trójka wektorów tworzy bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$:

(a) $(1,3,4),(2,1,5),(1,8,x)$,

(b) $(1,2,3),(3,4,9),(1,x,3)$,

(c) $(x,4,1),(x,1,-2),(5,x,2)$.

Zadanie 5.15 (zad. 40, 41, JR)**.** Znaleźć układ równań liniowych określający daną podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$:

(a) $L((1,0,0),(0,1,0))$, dla $n = 3$,

(b) $L((4,-1,3),(0,3,-1))$, dla $n = 3$,

(c) $L((1,1,1))$, dla $n = 3$,

(d) $L((4,1,3,-5))$, dla $n = 4$,

(e) $L((1,-1,1,-1),(3,-4,5,-8))$, dla $n = 4$,

(f) $L((0,1,2,1),(1,3,4,1),(4,7,6,-1))$, dla $n = 4$.

6 Macierz przejścia

6.1 Zadania

Zadanie 6.1 (zad. 281, JR)**.** Na podstawie definicji znaleźć macierz przejścia od bazy B do bazy C przestrzeni wektorowej V, gdzie:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = ((3,4),(9,8))$, $C = ((1,1),(3,2))$,

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $B = ((1,0),(16,7))$, $C = ((7,3),(9,4))$,

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $B = ((1,-2,0),(0,1,-1),(-1,2,1))$, $C = ((1,0,-1),(-2,1,2),(0,-1,1))$,.

Zadanie 6.2 (zad 282, 283, JR)**.** Korzystając z własności macierzy przejścia, znaleźć macierz przejścia od bazy B do bazy C przestrzeni wektorowej V, gdzie:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = ((7,11),(1,5))$, $C = ((4,5),(7,8))$,

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $B = ((2,3,4),(4,4,5),(6,3,4))$, $C = ((1,2,3),(1,3,4),(1,5,7))$,

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $B = ((6,5,7),(9,9,8),(9,8,9))$, $C = ((5,2,4),(3,1,1),(5,1,2))$.

7 Przekształcenie liniowe

7.1 Zadania

Zadanie 7.1 (zad. 222, JR)**.** Sprawdzić, czy dana funkcja jest przekształceniem liniowym:

(a) $\varphi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1,x_2)) = (x_1+x_2+1, 55x_2, x_1x_2)$,
(b) $\varphi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1,x_2)) = (3x_1+4x_2, 5x_1-x_2)$,
(c) $\varphi:\ \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $\varphi(f) = f'$,
(d) $\varphi:\ \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((a_i)_{i=1}^\infty) = (a_1,a_2)$,
(e) $\varphi:\ C_{(-\infty,\infty)} \to C_{(-\infty,\infty)}$, $(\varphi(f))(x) = f(x-1)$.

Zadanie 7.2 (zad. 225, 226, JR)**.** Przekształcenie liniowe $\varphi:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ dane jest przez poniższe przyporządkowania. Obliczyć $\varphi((x_1,x_2))$.

(a) $n=2$, $(3,4)\mapsto(3,5,7)$, $(4,5)\mapsto(4,7,9)$,
(b) $n=2$, $(3,-1)\mapsto(2,5,5)$, $(5,-2)\mapsto(3,0,9)$,
(c) $n=3$, $(1,1,1)\mapsto(1,4,6)$, $(4,5,1)\mapsto(0,3,7)$, $(4,7,4)\mapsto(1,4,9)$.

Zadanie 7.3 (zad. 227, JR)**.** Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K i niech $a\in K$. Wykazać, że funkcja $\varphi_a:\ V\to V$ określona dla każdego $v\in V$ wzorem $\varphi_a(v)=av$ jest endomorfizmem przestrzeni V (funkcję tę nazywamy homotetią o współczynniku a). Zbadać dla jakich a funkcja φ_a jest automorfizmem przestrzeni V.

Zadanie 7.4 (zad. 228, JR)**.** Niech V będzie przestrzenią liniową, a W_1, W_2 takimi jej podprzestrzeniami, że $V = W_1\oplus W_2$. Funkcję $\pi_1:\ V\to W_1$ określoną dla dowolnych $w_1\in W_1,\ w_2\in W_2$ wzorem $\pi_1(w_1+w_2)=w_1$ nazywamy rzutowaniem przestrzeni V na podprzestrzeń W_1 wzdłuż przestrzeni W_2. Sprawdzić, że funkcja ta jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 7.5 (zad. 230, JR)**.** Poniższe podprzestrzenie W_1 i W_2 przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ spełniają warunek $\mathbb{R}^3 = W_1\oplus W_2$. Wyrazić analitycznie rzutowanie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na podprzestrzeń W_1 wzdłuż podprzestrzeni W_2:

(a) $W_1 = L((1,0,0),(0,1,0))$, $W_2 = L((1,1,1))$,
(b) $W_1 = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ x_1+2x_2-3x_3=0\}$, $W_2 = L((5,-2,0))$,
(c) $W_1 = L((4,3,5))$, $W_2 = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ x_1-5x_2+2x_3=0\}$.

Zadanie 7.6 (zad. 236, 237, JR)**.** Zbadać, czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^n$, spełniające dane warunki:

(a) $n=2$, $(2,4,3)\mapsto(1,3)$, $(1,5,4)\mapsto(0,3)$, $(9,3,1)\mapsto(7,6)$,
(b) $n=2$, $(2,4,5)\mapsto(3,5)$, $(1,5,8)\mapsto(3,8)$, $(7,5,1)\mapsto(6,1)$, $(10,8,3)\mapsto(9,4)$,
(c) $n=3$, $(1,0,3)\mapsto(4,5,6)$, $(4,3,1)\mapsto(3,8,-7)$,
(d) $n=3$, $(2,4,0)\mapsto(7,3,4)$, $(1,1,1)\mapsto(3,1,1)$, $(1,7,-5)\mapsto(6,4,7)$,
(e) $n=3$, $(4,1,2)\mapsto(1,2,1)$, $(5,3,4)\mapsto(3,5,1)$, $(6,5,6)\mapsto(5,8,1)$, $(7,7,8)\mapsto(7,9,1)$.