

4 Przestrzeń, podprzestrzeń, kombinacje liniowe wektorów, powłoka liniowa, liniowa zależność wektorów

4.1 Zadania

Zadanie 4.1 (zd). Czy zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem?

Zadanie 4.2 (zd*). Udowodnić, że charakterystyka ciała jest liczbą pierwszą lub jest równa 0.

Zadanie 4.3 (zd*). Wyznaczyć charakterystykę ciała K , gdzie $\mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} = 0$.

Zadanie 4.4 (zd). Obliczyć:

- (a) $-\frac{1}{4} + 2$ w $\mathbb{Z}/5$,
- (b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ w $\mathbb{Z}/7$.

Zadanie 4.5 (zd). Wykazać, że jeśli $\text{char } K = p > 0$, to $(a + b)^p = a^p + b^p$, dla dowolnych $a, b \in K$.

Zadanie 4.6. Czy struktura $\langle V, \oplus, \odot \rangle$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie:

$V = \mathbb{R}_{>0}$ oraz $\oplus : V \times V \rightarrow V$, $\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ zdefiniowane są wzorami:

$$v \oplus w := vw, \quad \alpha \odot v := v^\alpha, \quad \text{dla dowolnych } v, w \in V \text{ oraz } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 4.7. Rozpatrując iloczyn $(\mathbf{1} + \mathbf{1}) \bullet (v + w)$, gdzie $v, w \in V$ uzasadnić, że w aksjomatach przestrzeni liniowej słowo abelowa można opuścić.

Zadanie 4.8. Czy struktura $\langle V, +, \odot \rangle$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie:

$V := \mathbb{R}^2$ oraz $+: V \times V \rightarrow V$, $\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ zdefiniowane są wzorami:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \\ \alpha \odot (x_1, x_2) &:= (\alpha x_1, x_2), \end{aligned}$$

dla dowolnych $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.9. Sprawdzić, czy $W < V$, gdzie:

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$,
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$,
- (c) $V = \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ jest funkcją}\}$, $W = \{f \in \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ jest ograniczona}\}$,
- (d) $V = \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ jest funkcją}\}$, $W = \{f \in \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) \in \mathbb{Q}, \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}\}$,
- (e) $V = C_{[0,1]} := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ jest funkcją ciągłą}\}$, $W = \{f \in C_{[0,1]} : 2f(0) = f(1)\}$,
- (f) $V = C_{[0,1]} := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ jest ciągłą}\}$, $W = \{f \in C_{[0,1]} : \exists x \in [0, 1](f(x) = 0)\}$,
- (g) $V = \mathbb{R}[x]$, $W = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(0)f(1) = 0\}$,
- (h) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$,
- (i) $V = \mathbb{C}^n$, $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_1 = \overline{x_n}\}$,
- (j) $V = \mathbb{C}^n$, $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : |x_1| = |x_2| = \dots = |x_n|\}$.

Zadanie 4.10. Obliczyć w przestrzeni $(\mathbb{Z}/5)^3$:

$$2 \cdot (1, 4, 3) + 4 \cdot (3, 1, 2) - (4, 2, 3).$$

Zadanie 4.11. Znaleźć wektor $v \in (\mathbb{Z}/7)^3$ spełniający następującą równość w tej przestrzeni:

$$3 \cdot v + (1, 2, 5) = (3, 4, 6).$$

Zadanie 4.12. Z ilu różnych wektorów składa się przestrzeń $(\mathbb{Z}/p)^n$, gdzie p jest liczbą pierwszą?

Zadanie 4.13. Czy wektor $(2, 4, 8)$ jest kombinacją liniową wektorów $(1, 2, 3)$, $(3, 7, 5)$, $(5, 12, 8)$ w $\mathbb{R}^3$. Jeśli jest, podać współczynniki tej kombinacji.

Zadanie 4.14. Sprawdzić, czy prawdziwa jest przynależność:

- (a) $(8, 9, 11) \in L((3, 1, 4), (2, 7, 3))$ w $\mathbb{R}^3$,
- (b) $(-2, 0, -1, 0) \in L((-1, 1, -1, 2), (0, 1, -1, 2), (2, -1, -1, -1), (1, 3, 0, -2))$ w $\mathbb{R}^4$,
- (c) $(1, 5, 1, 1) \in L((1, 3, 4, 5), (1, 4, 6, 3))$ w $(\mathbb{Z}/7)^4$,
- (d) $(x, y, z, t) \in L((1, -1, 1, -1), (0, 0, 1, -1), (i, 1, -i, -1))$, gdzie $x + y + z + t = 0$ oraz $t = -1$ w $\mathbb{C}^4$,
- (e) $(7, 6, 4) \in L((3, 4, 2), (5, 5, 3))$ w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4.15. Sprawdzić, czy zachodzi równość w $\mathbb{R}^3$:

- (a) $L((4, 5, 3), (5, 7, 5)) = L((6, 9, 7), (7, 11, 9))$,
- (b) $L((1, 6, 5), (4, 1, 2)) = L((1, 2, 2), (5, 2, 4))$,
- (c) $L((1, 1, 3), (2, 5, 0)) = L((1, 2, 1), (1, 0, 5), (2, 1, 8))$.

Zadanie 4.16. Pokazać, że jeśli $v_1 + v_2 + v_3 = \theta$, to $L(v_1, v_2) = L(v_2, v_3)$.

Zadanie 4.17 (zd). Sprawdzić czy dane wektory, generują przestrzeń $\mathbb{R}^n$:

- (a) $(2, 2), (-1, 3)$, dla $n = 2$,
- (b) $(1, 3, 5), (1, 4, 7), (3, 8, 17)$, dla $n = 3$,
- (c) $(1, 2, 4), (7, 6, 4), (9, 7, 3)$, dla $n = 3$,
- (d) $(1, 2, 4), (3, 5, 9)$, dla $n = 3$.

Zadanie 4.18. Sprawdzić, czy dane wektory przestrzeni V są liniowo zależne:

- (a) $V = \mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $(3, -1, 2), (-9, 3, -6)$;
- (b) $V = \mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $(4, 4, 1), (1, 4, 4)$;
- (c) $V = \mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $(1, 0, -4), (5, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 8)$;
- (d) $V = (\mathbb{Z}/5)^3$ nad ciałem $\mathbb{Z}/5$, wektory: $(1, 1, 0), (4, 3, 1), (1, 4, 2)$;
- (e) $V = C_{\mathbb{R}}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $1, \sin x, \cos x$;
- (f) $V = C_{\mathbb{R}}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $1, 2^x, 3^x, 6^x$;
- (g) $V = C_{(0, \infty)}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $\log x, \log 2x, \log 3x$;

Zadanie 4.19. Wykazać, że dane wektory w przestrzeni $C_{\mathbb{R}}$ są liniowo niezależne:

- (a) $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$,
- (b) $1, \sin x, \sin^2 x, \sin^3 x, \dots$

Zadanie 4.20 (zad. 62, JR). Sprawdzić, czy każdy wektor przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej następującego układu wektorów:

- (a) $(1, 0, -1), (1, 1, 3), (4, 1, 1)$,
- (b) $(3, 3, 5), (1, 8, 4), (2, 7, 5)$,
- (c) $(1, 3, 4), (2, 7, 9)$,
- (d) $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (4, 7, 11), (3, 4, 7)$.

5 Baza i wymiar przestrzeni liniowej

5.1 Zadania

Zadanie 5.1. Czy wektory $w_1 = x - 5$, $w_2 = x^2 + 2x + 3$, $w_3 = x^2 + x + 1$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$?

Zadanie 5.2. Udowodnić, że wektory $1, x, x^2, \dots, x^n$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$.

Zadanie 5.3. Wyznacz współrzędne wektora: $v = (1, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$ w bazie $((1, 0, -1), (-2, 1, 2), (0, -1, 1))$.

Zadanie 5.4 (zad. 68, JR). Zbadać, czy następujące wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (wykorzystać fakt, że gdy $\dim_K V = n$, to n wektorów przestrzeni V tworzy jej bazę $\iff$ wektory te są liniowo niezależne):

- (a) $(1, -1, 1), (1, 1, -1), (-1, 1, 1)$,
- (b) $(1, 0, 1), (5, 1, 6), (8, -5, 3)$.

Zadanie 5.5 (zad. 69, JR). Wyznacz jedną z baz podprzestrzeni W przestrzeni $\mathbb{R}^4$, gdzie:

- (a) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$,
- (b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0\}$,
- (c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0\}$,
- (d) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 0, x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0\}$.

Zadanie 5.6 (zad. 76, JR). Wskazać taką bazę podprzestrzeni W przestrzeni $\mathbb{R}^4$, która jest podukładem danego układu wektorów rozpinających podprzestrzeni W . Określić wymiar podprzestrzeni W .

- (a) $W = L((1, 3, 3, 2), (3, 5, 6, 5), (8, 4, 9, 11), (5, 3, 6, 7))$,
- (b) $W = L((1, 1, 3, 7), (3, 4, 9, 17), (1, 2, 5, 9), (4, 5, 9, 27))$,
- (c) $W = L((1, 2, 0, 1), (4, 5, 1, 3), (5, 1, 3, 2), (1, -1, 1, 8))$.

Zadanie 5.7 (zad. 79, JR). Dla podanych podprzestrzeni $W_1, W_2 < \mathbb{R}^4$ znaleźć bazę przestrzeni $W_1 \cap W_2$:

- (a) $W_1 = L((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0))$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_4 = 0\}$,
- (b) $W_1 = L((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0))$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,
- (c) $W_1 = L((1, 7, 7, 8), (2, 6, 5, 7))$, $W_2 = L((5, 7, -1, 8), (5, 8, -1, 9))$,
- (d) $W_1 = L((1, 1, 4, 1), (3, 4, 9, 3))$, $W_2 = L((3, 4, 7, 6), (5, 7, 9, 9))$.

Zadanie 5.8 (zad. 87, JR). Wiadomo, że $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$. Przedstawić dany wektor $v \in \mathbb{R}^4$ w postaci odpowiedniej sumy:

- (a) $W_1 = L((0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1))$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 - 5x_4 = 0\}$, $v = (7, 2, 15, 8)$,
- (b) $W_1 = L((4, 0, 1, 0))$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 - 7x_4 = 0\}$, $v = (5, 6, 9, 1)$.

Zadanie 5.9 (zad. 88, JR). Zbadać, czy dla danych podprzestrzeni $W_1, W_2 < \mathbb{R}^4$ prawdziwy jest związek $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$:

- (a) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 = x_2 + x_3 = 0\}$, $W_2 = L((1, 1, 4, 1), (0, 1, 3, 0))$,
- (b) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = x_2 - x_3 = 0\}$, $W_2 = L((4, 1, 0, 3), (5, 1, -1, 4))$.

Zadanie 5.10 (zad. 89, JR). Podprzestrzenie W, W_1 i W_2 przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określone są następująco:

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$, $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$, $W_2 = L((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$. Zbadać, czy $W = W_1 + W_2$ i czy suma algebraiczna $W_1 + W_2$ jest sumą prostą.

Zadanie 5.11 (zad. 97, JR). Określone są podprzestrzenie $W_1, W_2 < \mathbb{R}^4$. Obliczyć wymiary podprzestrzeni $W_1, W_2, W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$, gdzie:

- (a) $W_1 = L((2, 5, 0, -2))$, $W_2 = L((1, 7, 3, -4), (3, 0, -5, 2))$,
- (b) $W_1 = L((1, 1, 1, 1))$, $W_2 = L((1, 0, 3, 1), (3, 5, 4, -2), (3, 4, 5, -1))$,

- (c) $W_1 = L((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0\}$,
 (d) $W_1 = L((1, 1, 2, 1), (6, 1, 1, 3))$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0\}$,
 (e) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_4 = x_1 + 2x_3 - x_4 = 0\}$,
 $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

Zadanie 5.12 (zad. 61, JR). Dane są wektory $v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$. Wektory v_1, v_2 są liniowo niezależne ($\dim_{\mathbb{R}} L(v_1, v_2) = 2$), a $L(w_1, w_2, w_3, w_4) = \mathbb{R}^4$. Które z wektorów w_1, w_2, w_3, w_4 można dołączyć do wektorów v_1, v_2 , by otrzymać bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

- (a) $v_1 = (1, 4, 2, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 1)$
 $w_1 = (1, 1, 0, 0)$, $w_2 = (2, 4, 1, 0)$, $w_3 = (1, 0, 0, 2)$, $w_4 = (2, 5, 3, 4)$,
 (b) $v_1 = (1, 1, 1, -1)$, $v_2 = (5, 2, 4, 1)$
 $w_1 = (1, 0, 1, 1)$, $w_2 = (2, 1, 1, 0)$, $w_3 = (4, 1, 1, 2)$, $w_4 = (3, 4, 3, 4)$.

Zadanie 5.13. Niech $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = x_4 - x_2 + 2x_3 = 0\} < \mathbb{R}^4$. Uzupełnić jedną z baz podprzestrzeni W do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 5.14 (zad. 71, JR). Zbadać, dla jakich liczb $x \in \mathbb{R}$ dana trójka wektorów tworzy bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$:

- (a) $(1, 3, 4), (2, 1, 5), (1, 8, x)$,
 (b) $(1, 2, 3), (3, 4, 9), (1, x, 3)$,
 (c) $(x, 4, 1), (x, 1, -2), (5, x, 2)$.

Zadanie 5.15 (zad. 40, 41, JR). Znaleźć układ równań liniowych określający daną podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$:

- (a) $L((1, 0, 0), (0, 1, 0))$, dla $n = 3$,
 (b) $L((4, -1, 3), (0, 3, -1))$, dla $n = 3$,
 (c) $L((1, 1, 1))$, dla $n = 3$,
 (d) $L((4, 1, 3, -5))$, dla $n = 4$,
 (e) $L((1, -1, 1, -1), (3, -4, 5, -8))$, dla $n = 4$,
 (f) $L((0, 1, 2, 1), (1, 3, 4, 1), (4, 7, 6, -1))$, dla $n = 4$.

6 Macierz przejścia

6.1 Zadania

Zadanie 6.1 (zad. 281, JR). Na podstawie definicji znaleźć macierz przejścia od bazy B do bazy C przestrzeni wektorowej V , gdzie:

- (a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = ((3, 4), (9, 8))$, $C = ((1, 1), (3, 2))$,
- (b) $V = \mathbb{R}^2$, $B = ((1, 0), (16, 7))$, $C = ((7, 3), (9, 4))$,
- (c) $V = \mathbb{R}^3$, $B = ((1, -2, 0), (0, 1, -1), (-1, 2, 1))$, $C = ((1, 0, -1), (-2, 1, 2), (0, -1, 1))$.

Zadanie 6.2 (zad 282, 283, JR). Korzystając z własności macierzy przejścia, znaleźć macierz przejścia od bazy B do bazy C przestrzeni wektorowej V , gdzie:

- (a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = ((7, 11), (1, 5))$, $C = ((4, 5), (7, 8))$,
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $B = ((2, 3, 4), (4, 4, 5), (6, 3, 4))$, $C = ((1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 5, 7))$,
- (c) $V = \mathbb{R}^3$, $B = ((6, 5, 7), (9, 9, 8), (9, 8, 9))$, $C = ((5, 2, 4), (3, 1, 1), (5, 1, 2))$.

7 Przekształcenie liniowe

7.1 Zadania

Zadanie 7.1 (zad. 222, JR). Sprawdzić, czy dana funkcja jest przekształceniem liniowym:

- (a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2 + 1, 55x_2, x_1x_2)$,
- (b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2)) = (3x_1 + 4x_2, 5x_1 - x_2)$,
- (c) $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $\varphi(f) = f'$,
- (d) $\varphi : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((a_i)_{i=1}^\infty) = (a_1, a_2)$,
- (e) $\varphi : C_{(-\infty, \infty)} \rightarrow C_{(-\infty, \infty)}$, $(\varphi(f))(x) = f(x - 1)$.

Zadanie 7.2 (zad. 225, 226, JR). Przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest przez poniższe przyporządkowania. Obliczyć $\varphi((x_1, x_2))$.

- (a) $n = 2$, $(3, 4) \mapsto (3, 5, 7)$, $(4, 5) \mapsto (4, 7, 9)$,
- (b) $n = 2$, $(3, -1) \mapsto (2, 5, 5)$, $(5, -2) \mapsto (3, 0, 9)$,
- (c) $n = 3$, $(1, 1, 1) \mapsto (1, 4, 6)$, $(4, 5, 1) \mapsto (0, 3, 7)$, $(4, 7, 4) \mapsto (1, 4, 9)$.

Zadanie 7.3 (zad. 227, JR). Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K i niech $a \in K$. Wykazać, że funkcja $\varphi_a : V \rightarrow V$ określona dla każdego $v \in V$ wzorem $\varphi_a(v) = av$ jest endomorfizmem przestrzeni V (funkcję tę nazywamy homotetią o współczynniku a). Zbadać dla jakich a funkcja φ_a jest automorfizmem przestrzeni V .

Zadanie 7.4 (zad. 228, JR). Niech V będzie przestrzenią liniową, a W_1, W_2 takimi jej podprzestrzeniami, że $V = W_1 \oplus W_2$. Funkcję $\pi_1 : V \rightarrow W_1$ określoną dla dowolnych $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ wzorem $\pi_1(w_1 + w_2) = w_1$ nazywamy rzutowaniem przestrzeni V na podprzestrzeń W_1 wzdłuż przestrzeni W_2 . Sprawdzić, że funkcja ta jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 7.5 (zad. 230, JR). Poniższe podprzestrzenie W_1 i W_2 przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ spełniają warunek $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$. Wyrazić analitycznie rzutowanie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na podprzestrzeń W_1 wzdłuż podprzestrzeni W_2 :

- (a) $W_1 = L((1, 0, 0), (0, 1, 0))$, $W_2 = L((1, 1, 1))$,
- (b) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$, $W_2 = L((5, -2, 0))$,
- (c) $W_1 = L((4, 3, 5))$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0\}$.

Zadanie 7.6 (zad. 236, 237, JR). Zbadać, czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$, spełniające dane warunki:

- (a) $n = 2$, $(2, 4, 3) \mapsto (1, 3)$, $(1, 5, 4) \mapsto (0, 3)$, $(9, 3, 1) \mapsto (7, 6)$,
- (b) $n = 2$, $(2, 4, 5) \mapsto (3, 5)$, $(1, 5, 8) \mapsto (3, 8)$, $(7, 5, 1) \mapsto (6, 1)$, $(10, 8, 3) \mapsto (9, 4)$,
- (c) $n = 3$, $(1, 0, 3) \mapsto (4, 5, 6)$, $(4, 3, 1) \mapsto (3, 8, -7)$,
- (d) $n = 3$, $(2, 4, 0) \mapsto (7, 3, 4)$, $(1, 1, 1) \mapsto (3, 1, 1)$, $(1, 7, -5) \mapsto (6, 4, 7)$,
- (e) $n = 3$, $(4, 1, 2) \mapsto (1, 2, 1)$, $(5, 3, 4) \mapsto (3, 5, 1)$, $(6, 5, 6) \mapsto (5, 8, 1)$, $(7, 7, 8) \mapsto (7, 9, 1)$.