Teoria oraz większość zadań w niniejszym skrypcie zostały opracowane na podstawie książek:

1. G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej cz. I, II*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2002.

2. J. Rutkowski, *Algebra liniowa w zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.

Spis treści

1 Postać zredukowana, metoda eliminacji Gaussa

1.1 Rząd macierzy

Definicja 1.1. Mówimy, że macierz A jest w **postaci zredukowanej**, gdy spełnione są następujące warunki:

1. (Jeśli występują w macierzy A wiersze zerowe). Począwszy od pewnego wiersza wszystkie następne wiersze macierzy składają się z samych zer. Powyżej tego wiersza nie ma wierszy złożonych z samych zer.

2. W każdym niezerowym wierszu pierwszy od lewej niezerowy wyraz jest równy 1. Ten niezerowy wyraz będziemy nazywać **jedynką wiodącą wiersza**.

3. Jeśli dwa sąsiednie wiersze nie są złożone z samych zer, to wiodąca jedynka wyższego wiersza znajduje się na lewo od wiodącej jedynki niższego wiersza.

4. Jeśli ponadto, każda kolumna zawierająca wiodącą jedynkę ma pozostałe wyrazy równe 0, to mówimy, że macierz A jest w **postaci całkowicie zredukowanej**.

Definicja 1.2. Następujące operacje wykonywane na wierszach macierzy, nazywać będziemy operacjami elementarnymi:

OE1. Zamiana miejscami dwóch wierszy.

OE2. Pomnożenie wiersza przez niezerowy element ciała K.

OE3. Dodanie do danego wiersza wielokrotności innego wiersza.

Definicja 1.3. Rzędem macierzy A nazywamy liczbę wiodących jedynek w dowolnej postaci zredukowanej macierzy A.

Fakt 1.1. *Operacje elementarne nie zmieniają rzędu danej macierzy.*

Fakt 1.2. *Dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, mamy:*

$$\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} A^T.$$

Twierdzenie 1.1. *Jeśli $A \in \mathrm{M}_n(K)$, to następujące warunki są równoważne:*

1. *A jest macierzą odwracalną,*

2. *postać całkowicie zredukowana macierzy A jest macierzą identycznościową I_n,*

3. $\operatorname{rz} A = n$,

4. $\det A \neq 0$,

5. *dla każdego $b \in K^n$ układ równań liniowych $AX = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie,*

6. *jednorodny układ równań liniowych $AX = \theta_n$ ma tylko jedno rozwiązanie: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$,*

7. *kolumny (wiersze) macierzy A są wektorami liniowo niezależnymi w przestrzeni K^n.*

Twierdzenie 1.2 (Kroneckera-Capellego)**.** *Niech $[A|b]$ będzie macierzą rozszerzoną danego układu równań liniowych. Wówczas ten układ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\operatorname{rz}[A|b] = \operatorname{rz} A.$$

Ponadto, jeśli układ równań liniowych o n niewiadomych ma rozwiązanie, to jego rozwiązanie zależy od $s = n - \operatorname{rz} A$ parametrów.

1.2 Zadania

Zadanie 1.1. Wykonać następujące operacje:

(a) $-\frac{1}{4}+2$ w ciele $\mathbb{Z}/5$,
(b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ w ciele $\mathbb{Z}/7$,
(c) $-2\cdot(1+\frac{2}{3})+\frac{3}{2}$ w ciele $\mathbb{Z}/5$,
(d) $-\frac{1}{2}+1$ w ciele $\mathbb{Z}/3$,
(e) $\frac{1}{6}-3\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$ w ciele $\mathbb{Z}/11$.

Zadanie 1.2. Znajdź postacie zredukowane i rzędy następujących macierzy:

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1,5 & 3 & 4,5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$,

(c) $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

(d) $D=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & 3 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & 7 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 20 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1.3. Znajdź postacie całkowicie zredukowane i rzędy następujących macierzy:

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$,

(b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 1.4. W zależności od parametru $m\in\mathbb{R}$ oblicz rząd poniższych macierzy:

(a) $A=\begin{bmatrix} 3m+7 & m+2 \\ 6m-5 & 2m-2 \end{bmatrix}$

(b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2m+5 & m^2+m \\ 2 & 5m+10 & 3m^2+3m \\ 3 & 6m+15 & 4m^2+2m \end{bmatrix}$

(c) $C=\begin{bmatrix} 2m^2+9m-5 & m^2+6m+5 \\ 2m^2+8m-10 & m^2+5m \end{bmatrix}$

(d) $D=\begin{bmatrix} m+1 & m & m & m \\ m & m+1 & m & m \\ m^2 & m & m^2 & m \\ 5m & m & 5m & m \end{bmatrix}$

Zadanie 1.5. Rozwiązać (metodą Gaussa) następujące układy równań w ciele liczb rzeczywistych:

(a) $\begin{cases} 2x_1+6x_2+10x_3 = 4 \\ 2x_1+7x_2+9x_3 = -1 \\ 3x_1+8x_2+7x_3 = -7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+2x_3 = 1 \\ 5x_1+9x_2+7x_3 = 3 \\ x_1-8x_2+7x_3 = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 & = & 12 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 & = & 9 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 & = & 7 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 1 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 & = & 4 \\ 7x_1 + 3x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 & = & 8 \\ 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 & = & 8 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 & = & 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 & = & 2 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 & = & 14 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 6x_3 & = & 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ 7x_1 - 2x_2 - 2x_3 & = & 1 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & 5 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 & = & 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 6 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 9x_3 & = & 6 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 & = & 7 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 & = & 3 \\ 8x_1 + 13x_2 - 5x_3 + x_4 & = & 9 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 & = & 11 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 6x_4 & = & 9 \\ 2x_1 - 2x_2 - 7x_3 + x_4 & = & 3 \\ 3x_1 - 8x_2 - 9x_3 + 4x_4 & = & 12 \end{cases}$

Zadanie 1.6. Rozwiązać układ równań:

(a) $\begin{cases} x + 11y + z & = & 5 \\ 2x + 2y & = & 6 \\ 5x + 10y + 4z & = & 1 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}/13$,

(b) $\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 1 \\ 2x + y + z & = & 0 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}/5$,

(c) $\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 4 \\ 3x + 4y + z & = & 4 \\ 2x + 3y + 2z & = & 1 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}/5$,

(d) $\begin{cases} x + y + z & = & 0 \\ x + 4y + 2z & = & 3 \\ 3x + y + 4z & = & 3 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}/5$,

(e) $\begin{cases} 2x + y + 4z & = & 4 \\ 3x + y + z & = & 0 \\ 2x + 3y + 3z & = & 0 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}/5$,

(f) $\begin{cases} x + 3y + 5z & = & 6 \\ 4x + 6y + 3z & = & 1 \\ 6x + 5y + 4z & = & 5 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}/7$.

Zadanie 1.7 (BG 1, 12/60)**.** Na twardym dysku o pojemności 124 GB dokonano partycji w celu instalacji czterech różnych systemów operacyjnych. Pliki systemowe i programy obliczeniowe zajmują 25% pierwszej, drugiej i czwartej partycji oraz 20% trzeciej partycji, łącznie 29 GB na wszystkich partycjach. Katalogi z różnorodnymi edytorami tekstu zajmują 10% pierwszej, trzeciej i czwartej partycji oraz 12,5% drugiej partycji, łącznie 13 GB na wszystkich partycjach. Gry zajmują 12,5% trzech pierwszych partycji i 10% czwartej partycji, łącznie 15 GB na wszystkich partycjach. Jaki jest rozmiar każdej partycji?

Zadanie 1.8. Znajdź wielomian $f \in \mathbb{R}[X]$ stopnia co najwyżej drugiego spełniający warunki:

(a) $f(1) = 5,\ f(2) = 10,\ f(3) = 17$,

(b) $f(-1) = 15,\ f(3) = 3,\ f(4) = 5$.

Zadanie 1.9. Znajdź wielomian $f \in \mathbb{R}[X]$ stopnia co najwyżej trzeciego spełniający warunki:

(a) $f(1) = 7,\ f(2) = 1,\ f(3) = 1,\ f(4) = 13$,

(b) $f(-1) = 11,\ f(1) = 1,\ f(3) = 15,\ f(5) = 53$.

Zadanie 1.10. Niech $f \in \mathbb{R}[x]$. Reszta z dzielenia wielomianu f przez $(x-1)$ wynosi 1, reszta z dzielenia przez $(x-2)$ wynosi -2, natomiast przy dzieleniu przez $(x-3)$ otrzymujemy resztę -1. Jaką otrzymamy resztę z dzielenia wielomianu f przez wielomian $(x-1)(x-2)(x-3)$?

Zadanie 1.11 (BG 1, 2/58)**.** Dla jakiej wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 - mx_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 - mx_3 & = & 1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases}$$

(a) ma w ciele $\mathbb{R}$ dokładnie jedno rozwiązanie?
(b) ma w ciele $\mathbb{R}$ nieskończenie wiele rozwiązań?
(c) jest sprzeczny w $\mathbb{R}$?

Zadanie 1.12 (BG 1, 3/58)**.** Dla jakiej wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + (9+m)x_3 - 3x_4 + (10+3m)x_5 & = & -3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_5 & = & 1 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 & = & -2 \end{cases}$$

(a) ma w ciele $\mathbb{R}$ nieskończenie wiele rozwiązań?
(b) jest sprzeczny w $\mathbb{R}$?

Zadanie 1.13 (BG 1, 8/59)**.** Zbadać zbiór rozwiązań następującego układu równań liniowych o współczynnikach w $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 & = & a^2 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 & = & a^2 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 & = & a^2 \end{cases}$$

w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.14 (BG 1, 5/58)**.** Znaleźć układ dwóch równań liniowych z czterema niewiadomymi: x_1, x_2, x_3, x_4, którego zbiór rozwiązań zawiera ciągi liczb:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, -1), (1, 2, -1, 0).$$

Zadanie 1.15 (BG 1, 6/58)**.** Znaleźć układ trzech równań liniowych z sześcioma niewiadomymi: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, którego zbiór rozwiązań zawiera ciągi liczb:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0, -2, 1, 0, -1), (1, 1, 2, -1, 1, 0), (2, 5, 1, -1, 0, 0).$$

Zadanie 1.16 (BG 1, 11/60)**.** Stu studentów pierwszego roku matematyki podzielono na trzy grupy: A, B, C. W celach promocyjnych firma ALG.LIN.POL rozdzieliła pomiędzy wszystkich studentów 229 długopisów i 395 ołówków w taki sposób, że każdy student grupy A otrzymał 3 długopisy i 5 ołówków, każdy student grupy B otrzymał 2 długopisy i 3 ołówki oraz każdy student grupy C otrzymał 2 długopisy i 4 ołówki. Ilu studentów liczyła każda z grup A, B i C?

2 TEORIA MACIERZY

2.1 Teoria

2.1.1 Operacje na macierzach

Poniżej ciało K oznacza ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz każde inne, które już Państwo poznaliście. (Ogólnie, teoria poniższa jest prawdziwa dla dowolnego ciała np. ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$, ciała skończonego $\mathbb{F}_q$, gdzie $q = p^m$ dla pewnej liczby pierwszej p).

Definicja 2.1. Macierzą o elementach z ciała K o m wierszach i n kolumnach nazywamy każdą funkcję $T\colon \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\} \to K$.

Zbiór wszystkich macierzy o elementach z ciała K o m wierszach i n kolumnach oznaczamy symbolem $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ lub $\mathrm{M}_{m,n}(K)$.

Dla prostoty zapisu przyjmujemy, że $T((i,j)) = a_{ij}$ i wówczas zapisujemy:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

lub skrótowo $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$.

W zbiorze $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ wprowadzamy działania: **dodawanie macierzy** i **mnożenie przez skalar z ciała** K. Definicje działań:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}],\ \text{gdzie } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ dla } i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n,$$
$$\alpha \cdot [a_{ij}] = [c_{ij}],\ \text{gdzie } c_{ij} = \alpha a_{ij} \text{ dla } i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n.$$

Powyżej zdefiniowane działanie dodawania jest łączne, przemienne, posiada element neutralny, tj. macierz zerową oraz dla każdej macierzy istnieje "macierz przeciwna". Zatem zbiór $M_{m\times n}(K)$ wraz z dodawaniem macierzy jest grupą abelową.

Definicja 2.2. Niech $m,n,l \in \mathbb{N}$ oraz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B = [b_{ij}] \in \mathrm{M}_{n\times l}(K)$. **Iloczynem macierzy A i B** nazywamy macierz $[c_{ij}] \in \mathrm{M}_{m\times l}(K)$ zdefiniowaną następująco:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},\ \text{dla } i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,l.$$

Iloczyn macierzy A i B oznaczamy AB.

Definicja 2.3. Niech $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. **Macierzą transponowaną** do macierzy A, jest macierz $A^T = [a^T_{ij}] \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$, zdefiniowana następująco:

$$a^T_{ij} = a_{ji},\ \text{dla } i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,l.$$

W zbiorze macierzy kwadratowych $\mathrm{M}_n(K)$ mnożenie macierzy jest działaniem wewnętrznym. Elementem neutralnym dla mnożenia jest macierz jednostkowa $I = [a_{ij}]$, gdzie

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

(Zbiór $\mathrm{M}_n(K)$ wraz z dodawaniem macierzy, mnożeniem macierzy przez skalar oraz mnożeniem macierzy tworzy algebrę (nieprzemienną) z jedynką nad ciałem K.)

Definicja 2.4. Niech $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$. **Śladem macierzy** A nazywamy sumę elementów na głównej przekątnej i oznaczamy symbolem $\operatorname{tr} A$, tzn.

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

2.2 Zadania

Zadanie 2.1. Wykonać następujące działania na macierzach:

(a) $4\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 8\end{bmatrix}$,

(b) $3\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 8 & 5\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$.

Zadanie 2.2 (zad 112, JR)**.** Niech:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -3\end{bmatrix}.$$

Wykonać następujące iloczyny: $AB, AC, A^2, BB^T, B^TB, AA^T, B^TA, B^TC, C^TB$.

Zadanie 2.3 (zad 113, 115, 116, JR)**.** Obliczyć iloczyny:

(a) $\begin{bmatrix}1 & 4 & -4 & 3\\ 2 & 1 & -2 & 2\\ -5 & 8 & -4 & 1\\ 9 & 1 & -6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 2 & 4\\ 3 & 7 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -5 & -7\end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}95 & 99 & 101\\ 97 & 96 & 99\\ 96 & 99 & 102\end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 6 & -5\\ 5 & 4 & -4\\ 4 & 5 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5 & 4\\ 5 & 4 & 3\\ 8 & 9 & 7\end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$.

Zadanie 2.4 (zad 117, JR)**.** Podać przykład macierzy $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ takich, że $A \neq 0$, $B \neq 0$ i $AB = 0$.

Zadanie 2.5 (zad. 120, JR)**.** Niech $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć:

(a) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n$,

(b) $\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}^n$,

(c) $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^n$.

Zadanie 2.6 (zad. 125, JR)**.** Obliczyć ślad macierzy $\begin{bmatrix}11 & -4 & 7\\ 12 & -8 & 5\\ 13 & -9 & 5\end{bmatrix}$.

Zadanie 2.7 (zad. 126, 109, 129, JR)**.** Udowodnić, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $C \in \mathrm{M}_{n\times l}(K)$, $D, F \in \mathrm{M}_n(K)$ zachodzi:

(a) $\operatorname{tr}(D+F) = \operatorname{tr} D + \operatorname{tr} F$,

(b) $\operatorname{tr}(DF) = \operatorname{tr}(FD)$,

(c) $\operatorname{tr}(aD) = a \operatorname{tr} D$,
(d) $(A+B)^T = A^T + B^T$,
(e) $(A^T)^T = A$,
(f) $(aA)^T = aA^T$,
(g) $(AC)^T = C^T A^T$.

Zadanie 2.8 (zad. 127, JR)**.** Pokazać, że nie istnieją macierze $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, takie że $AB - BA = I_n$.

Zadanie 2.9 (zad. 130, JR)**.** Wykazać, że dla każdej macierzy $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, iloczyn AA^T jest macierzą symetryczną.

Zadanie 2.10. Znajdź macierze odwrotne (o ile istnieją) dla poniższych macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & -7 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3 WYZNACZNIK MACIERZY — opracowanie dra Piotra Rzonsowskiego

3.1 Teoria

3.1.1 Definicja i podstawowe własności wyznacznika, tw. Laplace'a, tw. Cauchy'ego

Definicja 3.1. Wyznacznik macierzy kwadratowej zdefiniujemy za pomocą indukcji matematycznej.

1. Jeżeli $A = [a] \in M_{1,1}(K)$, to $\det A = a$.

2. Załóżmy, że został zdefiniowany wyznacznik macierzy kwadratowej o $n-1$ wierszach. Niech $A \in M_{n,n}(K)$ oraz niech $M_{i,j} \in M_{n-1,n-1}(K)$ będzie macierzą, którą otrzymujemy po wykreśleniu z A i-tego wiersza i j-tej kolumny. Ponadto niech
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$
Element A_{ij} ciała K nazywamy **dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} macierzy A. Przy tych oznaczeniach wyznacznik macierzy A definiujemy za pomocą wyrażenia
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Twierdzenie 3.1 (Laplace'a). *Jeżeli $A \in M_{n,n}(K)$, to zachodzą następujące wzory:*

1. $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ *dla każdego* $1 \leq i \leq n$,

2. $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$ *dla każdego* $1 \leq j \leq n$.

Definicja 3.2. Niech $A \in M_{n,n}(K)$ będzie macierzą o współrzędnych $a_{ij} \in K$. Wówczas mówimy, że A jest macierzą:

1. **dolną trójkątną/dolnotrójkątną**, gdy ma zera nad przekątną, czyli $a_{ij} = 0$ dla $i < j$,

2. **górną trójkątną/górnotrójkątną**, gdy ma zera pod przekątną, czyli $a_{ij} = 0$ dla $i > j$,

3. **przekątniową (diagonalną)**, jeżeli $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$.

Własności 3.1 (Wyznacznika)**.** *Niech*
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_{n,n}(K).$$

1. *Jeżeli macierz A ma wiersz lub kolumnę złożoną z samych zer, to* $\det A = 0$.

2. *Dla każdego $c \in K$ i dla każdego $1 \leq j \leq n$ mamy*
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = c \det A$$

Taka sama własność zachodzi przy mnożeniu dowolnego wiersza macierzy przez skalar.

3. *Jeżeli macierze* B , $C \in M_{n,n}(K)$ *różnią się od macierzy* A *tylko* j*-tą kolumną i mają postać*

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

to $\det C = \det A + \det B$. *Taka sama własność zachodzi dla wierszy macierzy.*

4. *Jeżeli macierz* A *ma dwie identyczne kolumny (odpowiednio wiersze), to* $\det A = 0$.

5. *Zamiana miejscami dwóch kolumn (wierszy) macierzy powoduje, że znak wyznacznika zmienia się na przeciwny.*

6. *Jeżeli jedna kolumna (wiersz) macierzy* A *jest wielokrotnością innej kolumny (odpowiednio - wiersza), to* $\det A = 0$.

7. *Jeżeli do jednej kolumny (wiersza) macierzy* A *dodamy wielokrotność innej kolumny (odpowiednio wiersza), to wyznacznik macierzy nie ulegnie zmianie.*

8. *Jeżeli* $A, B \in M_{n,n}(K)$ *to zachodzą następujące równości:*

$$\det(AB) = \det A \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n}$$

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n}$$

gdzie S_n *jest grupą permutacji zbioru n-elementowego, a* $\operatorname{sgn} \sigma$ *jest znakiem permutacji* $\sigma \in S_n$.

Twierdzenie 3.2 (Cauchy'ego)**.** *Jeżeli* $A, B \in M_{n,n}(K)$, *to*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

3.1.2 Wzór na macierz odwrotną

Definicja 3.3. Dla macierzy kwadratowej $A \in M_{n,n}(K)$ definiujemy jej **macierz dołączoną**

$$A^D = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

tzn A^D jest macierzą kwadratową, która na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny ma dopełnienie algebraiczne A_{ji}.

Twierdzenie 3.3. *Jeżeli* $A \in Gl_n(K)$, *to zachodzi następujący wzór:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D$$

3.1.3 Wzory Cramera

Mamy następujący układ równań:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

Twierdzenie 3.4. *Jeżeli* $\det A \neq 0$*, to układ równań* (1) *ma dokładnie jedno rozwiązanie, które jest dane za pomocą wzorów*

$$x_i = \frac{\det A_{x_i}}{\det A},$$

dla $1 \leq i \leq n$*, gdzie* A_{x_i} *otrzymuje się przez zastąpienie* i*-tej kolumny macierzy* A *kolumną wyrazów wolnych układu* (1)*.*

3.1.4 Wykorzystanie wyznaczników do obliczania rzędu macierzy

Definicja 3.4. **Minorem macierzy** A nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej, utworzonej z macierzy A w wyniku skreślenia odpowiedniej liczby kolumn i odpowiedniej liczby wierszy. Stopień tego wyznacznika nazywamy stopniem minora.

UWAGA 1. Macierz $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ posiada minory k-tego stopnia dla każdego $1 \leq k \leq \min(n, m)$.

Twierdzenie 3.5. *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{m,n}(K).$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. $\operatorname{rz} A = r$,
2. *istnieje niezerowy minor stopnia* r *macierzy* A *oraz każdy minor macierzy* A *stopnia większego niż* r *(o ile taki istnieje) jest równy zeru.*

Definicja 3.5. Niech D będzie minorem macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ stopnia r. Wyznaczniki tych wszystkich macierzy kwadratowych, dla których D jest minorem nazywamy **minorami obejmującymi minor** D.

Twierdzenie 3.6 (**Metoda minorów obejmujących**). *Niech* D *będzie różnym od zera minorem macierzy* $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ *stopnia* r*. Jeżeli wszystkie minory obejmujące minor* D *stopnia* $r+1$ *są równe zeru to rząd macierzy* A *jest równy* r*.*

Część zadań pochodzi z materiałów opracowanych przez dra T. Werbińskiego

3.2 Zadania

Zadanie 3.1. Obliczyć następujące wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, **(b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, **(c)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Zadanie 3.2. Wykazać, że wyznacznik macierzy dolnotrójkątnej/górnotrójkątnj jest równy iloczynowi elementów na przekątnej.

Zadanie 3.3. Wykaż, że jeśli liczba zer w macierzy stopnia n jest większa od $n^2 - n$, to jej wyznacznik równy jest 0.

Zadanie 3.4. Wyprowadzić wzór na wyznaczniki macierzy $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3$ z własności 8 wyznacznika.

Zadanie 3.5. Niech $c \in \mathbb{R}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $\det A = a$. Oblicz $\det cA$.

Zadanie 3.6. Niech $a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$. Stosując twierdzenie Cauchy'ego do macierzy

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -bt & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c & d \\ -dt & c \end{bmatrix}$ udowodnić tożsamość $(a^2 + b^2t)(c^2 + d^2t) = (ac - bdt)^2 + (ad + bc)^2t$.

Zadanie 3.7. Oblicz wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 100 & 29 & 23 \\ 0 & -5 & 2 & 24 & 67 \\ 0 & 0 & 2 & 345 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 3453 & 345 \\ 7 & 6786 & 678 \\ 1 & 9129 & 912 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 7 & 9 & 4 \end{vmatrix}$

Zadanie 3.8. Za pomocą wzorów Cramera rozwiąż następujący układ równań nad ciałem $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 = 3 \\ 5x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -5 \\ 4x_1 - 5x_2 + 9x_3 = -8 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2 \\ 4x_1 + 9x_2 + 11x_3 = 5 \end{cases}$

Zadanie 3.9 (zad. 157, JR)**.** Nie obliczając danego wyznacznika, wykazać, że dzieli się on przez 10:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, **(b)** $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, **(c)** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Zadanie 3.10. Oblicz macierze odwrotne do następujących macierzy (jeśli istnieją):

(a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $E = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Zadanie 3.11 (zad. 159, JR)**.** Dowieść, że nie można tak dobrać elementów macierzy $A \in M_3(\mathbb{R})$, aby wszystkie składniki, których sumą jest wyznacznik macierzy A (wzór Sarrusa), były dodatnie.

Zadanie 3.12 (zad. 160, JR)**.** Obliczyć wyznacznik:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Zadanie 3.13 (zad. 162, JR)**.** Obliczyć wyznacznik Vandermonde'a:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Zadanie 3.14 (zad. 172, JR)**.** Niech $A \in \mathrm{M}_m(K)$, $B \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $D \in \mathrm{M}_n(K)$. Wykazać, że:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det D.$$

Zadanie 3.15 (zad. 173, JR)**.** Niech $A \in \mathrm{M}_m(K)$, $C \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$, $D \in \mathrm{M}_n(K)$. Wykazać, że:

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det D.$$

Zadanie 3.16 (zad. 174, JR)**.** Niech $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathrm{M}_m(K)$, $C \in \mathrm{M}_n(K)$. Wykazać, że:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{mn} \det B \cdot \det C.$$

Zadanie 3.17. Rozwiąż równania:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$