1 Macierz przekształcenia liniowego

Zadanie 1.1. Wyznaczyć współrzędne wektora:

(a) $v = (1, -2, 0)$,
(b) $v = (0, 1, 2)$

w bazie $B = ((1, 3, 4), (0, 1, 2), (0, 0, -1))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 1.2. Niech $\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\psi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi danymi wzorami:
$\varphi\left((x_1, x_2, x_3)\right) = (4x_1 + 3x_2 + x_3,\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3)$, $\quad \psi\left((x_1,\ x_2)\right) = (3x_1 - x_2,\ 5x_1 - 3x_2,\ 7x_1 - 5x_2)$.
Wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego φ, ψ, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$.

Zadanie 1.3 (zad. 262, 263, 296, JR)**.** Niech φ będzie przekształceniem liniowym. Wyznaczyć macierz $M_{BC}(\varphi)$ przekształcenia φ w bazach B i C, gdzie:

(a) $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2)) = (4x_1 - x_2, 7x_1 - 3x_2)$, $B = ((2, 1), (4, 7))$, $C = ((1, 1), (0, 1))$,
(b) $\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 - x_3)$, $B = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$, $C = ((1, 4), (1, 5))$,
(c) $\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$, $B = ((1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 1, 0))$, $C = ((0, -1, 0),\ (1, 2, 0),\ (0, 0, 2))$,
(d) $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2)) = (4x_1 + x_2, 7x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$, $B = ((1, 4), (2, 7))$, $C = ((-1, 9, 0), (2, 0, 5), (0, 7, 2))$.

Zadanie 1.4. Wyznaczyć współrzędne $\varphi(v)$ w bazie C, wykorzystując macierze otrzymane w odpowiednich podpunktach zadania 1.3, gdzie:

(a) $v = (6, 8)$;
(b) $v = (0, 0, 2)$;
(c) $v = (2, 1, -1)$;
(d) $v = (1, 3)$.

Zadanie 1.5. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego $\varphi\colon\ V \to W$ w bazach B i C, gdzie:

(a) $V = (\mathbb{Z}/7)^3,\ W = (\mathbb{Z}/7)^2, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} , x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}\right), \quad C = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$;

(b) $V = \mathbb{R}^3,\ W = \mathbb{R}[x]_4, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = (a_1 + a_2)x^4 + (-a_2 + 2a_3)x^3 + (-a_1 + 2a_2 - a_3)x^2 + a_1 x + (a_1 + a_2 - a_3)$,
$B = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \quad C = \left(1,\ x^3,\ x^4,\ x^2,\ x\right)$;

(c) $V = \mathbb{R}[x]_4,\ W = \mathbb{R}[x]_4, \quad \varphi\left(f(x)\right) = f'(x), \quad B = \left(x,\ 1,\ x^3,\ x^2,\ x^4\right), \quad C = \left(x^4,\ x^3,\ x^2,\ x,\ 1\right)$;

(d) $V = \mathbb{R}[x]_3,\ W = \mathbb{R}[x]_2, \quad \varphi\left(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) = a_0x^2 + (a_1 + a_2)x + a_3, \quad B = \left(x^3,\ x^2,\ x,\ 1\right)$, $C = \left(x^2,\ x,\ 1\right)$.

Zadanie 1.6 (zad. 264, 265, JR)**.** Niech φ będzie przekształceniem liniowym danym przez macierz $M_{BC}(\varphi)$. Znaleźć wzór:

(a) $\varphi((x_1, x_2))$, gdzie $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$, $B = C = ((1, 0), (0, 1))$,

(b) $\varphi((x_1, x_2))$, gdzie $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = ((5, 1), (11, 2))$, $C = ((1, 1), (4, 3))$,

Część zadań pochodzi z materiałów opracowanych przez dra T. Werbińskiego

(c) $\varphi((x_1, x_2, x_3))$, gdzie $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$, $B = ((5,4,2),(1,1,0),(2,2,1))$, $C = ((3,1),(2,1))$.

Zadanie 1.7 (zad. 268, 269, JR)**.** Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym. Znaleźć bazę:

(a) C, gdy mamy dane: wzór przekształcenia $\varphi((x_1, x_2)) = (3x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$, macierz $M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ oraz bazę $B = ((5,4),(3,2))$,

(b) B, gdy mamy dane: wzór przekształcenia $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, 4x_1 + x_2)$, macierz $M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ oraz bazę $C = ((-1,6),(0,5))$.

Zadanie 1.8 (zad. 292, JR)**.** Przekształcenie liniowe $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dane jest przez macierz $M_{BC}(\varphi) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz $M_{B'C'}(\varphi)$, gdy:

(a) $B = ((4,5,1),(1,1,1),(3,0,5))$, $C = ((4,4),(-4,-5))$,
$B' = ((6,4,5),(4,1,6),(5,2,7))$, $C' = ((0,1),(4,3))$.

(b) $B = ((4,4,1),(3,0,1),(4,3,1))$, $C = ((1,2),(2,-1))$,
$B' = ((4,4,1),(5,8,1),(3,1,1))$, $C' = ((3,1),(-5,0))$.

Zadanie 1.9 (zad. 293, JR)**.** Endomorfizm φ przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ ma w bazie kanonicznej macierz macierz $M(\varphi) = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz tego endomorfizmu w bazie B, gdzie:

(a) $B = ((1,0),(-1,1))$;

(b) $B = ((7,5),(6,3))$.

2 Jądro i obraz przekształcenia liniowego; przestrzeń ilorazowa

Zadanie 2.1 (zad. 245, JR)**.** Sprawdzić, że jądro przekształcenia liniowego $\varphi : V \to W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Zadanie 2.2 (zad. 247, JR)**.** Sprawdzić, że obraz przekształcenia liniowego $\varphi : V \to W$ jest podprzestrzenią przestrzeni W.

Zadanie 2.3 (zad. 246, JR)**.** Wykazać, że przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Ker}\varphi = \{\theta_V\}$.

Zadanie 2.4 (zad. 248, JR)**.** Sprawdzić, że jeśli funkcja $\varphi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym i $V = L(v_1, \ldots, v_n)$, to $\operatorname{Im}\varphi = L(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$.

Zadanie 2.5 (zad. 252, JR)**.** Znaleźć po jednej bazie jądra i obrazu przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, którego wartość w dowolnym punkcie $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ jest równa:

(a) $(x_1 - 3x_2 - 5x_3, x_1 - 3x_2 - 5x_3, x_1 - 3x_2 - 5x_3, x_1 - 3x_2 - 5x_3)$,
(b) $(x_1 + 2x_2 + 4x_3, 3x_1 + x_2 + 7x_3, 2x_1 + 5x_2 + 9x_3, 6x_2 + 6x_3)$,
(c) $(x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3, 3x_1 - x_2 + 4x_3, 4x_1 - 2x_2)$.

Zadanie 2.6 (zad. 254, JR)**.** Wypisać wszystkie elementy podanej przestrzeni ilorazowej, znaleźć bazę podanej przestrzeni ilorazowej oraz zbudować tabelki działań w podanej przestrzeni ilorazowej:

(a) $(\mathbb{Z}/2)^3/W$, gdzie $W = \{(0,0,0),\ (1,0,0)\}$;
(b) $(\mathbb{Z}/3)^2/W$, $W = L((1,2))$.

Zadanie 2.7 (zad. 255, 256, JR)**.** Opisać warstwy przestrzeni wektorowej V względem jej podprzestrzeni W. Korzystając z I twierdzenia o izomorfizmie, pokazać, że $V/W \cong V'$, gdzie:

(a) $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in V :\ a_2 = 0\}$, $V' = \mathbb{R}$;
(b) $V = \mathbb{R}^\infty$, $W = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in V :\ a_1 = 4a_2 = 5a_3\}$, $V' = \mathbb{R}^2$;
(c) $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $W = \{[a_{ij}] \in V :]; a_{12} = a_{21} = 0\}$, $V' = \mathbb{R}^2$;
(d) $V = C_{[0;1]}$, $W = \{f \in V :\ f(0) = f(1) = 0\}$, $V' = \mathbb{R}^2$.

Część zadań pochodzi z materiałów opracowanych przez dra T. Werbińskiego

3 Wektory własne, wartości własne i przestrzenie własne

Zadanie 3.1. Wyznacz wektory i wartości własne endomorfizmu $f\colon V \to V$, jeśli

(a) $V = \mathbb{R}^3$ oraz $f((x, y, z)) = (x - y - z, 2y - z, 3z)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$ oraz $f((x, y, z)) = (-3x - 2y - 4z, 2x + 7y + 10z, x - 2y - 2z)$;
(c) $V = \mathbb{Q}^3$ oraz $f((x, y, z)) = (3x - y + z, 2x + z, 2x - 2y + 3z)$;
(d) $V = \mathbb{C}^2$ oraz $f((x, y)) = (x - y, x + y)$;
(e) $V = (\mathbb{Z}/5)^2$ oraz $f((x, y)) = (2x + 4y, x + 4y)$;
(f) $V = \mathbb{R}[X]_4$ oraz $f(\varphi(x)) = \varphi'(x)$.

Zadanie 3.2. Niech $n \geq 2$ i $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K$. Wyznacz wielomian charakterystyczny dla macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Wywnioskuj, że dowolny unormowany wielomian $f \in K[X]$ stopnia n jest wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$.

Zadanie 3.3. Podaj przykład takiej macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$, że

(a) $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ i A nie ma wartości własnych.
(b) $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ ma tylko jedną wartość własną i nie jest macierzą jednostkową pomnożoną przez skalar.
(c) $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ i A nie ma wartości własnych.
(d) $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ ma dokładnie dwie różne wartości własne.

Zadanie 3.4. Dla wartości własnych podanych macierzy (nad $\mathbb{R}$) wyznacz krotność algebraiczną oraz krotność geometryczną

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 \\ 9 & -7 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3.5. Niech $\lambda \in K$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

Wykaż, że λ jest wartością własną macierzy A oraz oblicz jej krotność algebraiczną i geometryczną.

Zadanie 3.6. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne endomorfizmu

$$\varphi\colon \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2,$$

danego wzorem:

$$\varphi(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x^2 + (a_2 + 5a_1 - 3a_0)x - 3a_1 + 5a_0.$$

Czy macierz tego przekształcenia jest diagonalizowalna (czy da się sprowadzić do postaci diagonalnej)?

Część zadań pochodzi z materiałów opracowanych przez dra T. Werbińskiego

Zadanie 3.7 (zad. 321, JR)**.** Zbadać, czy macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(K)$ jest diagonalizowalna, jeśli ciało K jest następujące:

(a) $\mathbb{Q}$;

(b) $\mathbb{R}$;

(c) $\mathbb{C}$;

(d) $\mathbb{Z}/5$;

(e) $\mathbb{Z}/7$;

(f) $\mathbb{Z}/11$.

Zadanie 3.8 (zad. 322, JR)**.** Znaleźć macierz diagonalną D podobną do danej macierzy $A \in M_3(\mathbb{R})$, jeśli taka macierz D istnieje. Znaleźć też wtedy macierz odwracalną S taką, że $D = S^{-1}AS$, gdzie macierz A jest postaci:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} -7 & 2 & 6 \\ -4 & 2 & 3 \\ -8 & 2 & 7 \end{bmatrix}$;

(g) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \\ 6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$;

(h) $\begin{bmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 8 & -7 & 1 \\ 8 & -8 & 1 \end{bmatrix}$;

(i) $\begin{bmatrix} -11 & 5 & 5 \\ -12 & 5 & 6 \\ -12 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

Zadanie 3.9. Niech $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} -7 & 2 & 6 \\ -4 & 2 & 3 \\ -8 & 2 & 7 \end{bmatrix}^n$$

Zadanie 3.10. Udowodnij, że przestrzeń $W = L(w_1, \ldots, w_n)$ jest T-niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy $T(w_j) \in W$ dla każdego $j = 1, 2, \ldots, n$.

Zadanie 3.11. Sprawdzić, czy W jest T-niezmienniczą podprzestrzenią w V:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}$, $T(x, y, z) = (x + 3y + 3z, -3x - 5y - 3z, 3x + 3y + z)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = L((1, 0, -1), (1, -1, 1))$, $T(x, y, z) = (x - y - z, 2x - y, 3z)$;
(c) $V = \mathbb{R}^3$, $W = L((1, -1, 1), (1, 1, -1))$, $T(x, y, z) = (-3x - 2y - 4z, 2x + 7y + 10z, x - 2y - 2z)$;
(d) $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $W = \{A \in V : A^T = A\}$, $T(A) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] A$;

Zadanie 3.12. Znaleźć wszystkie jednowymiarowe podprzestrzenie T-niezmiennicze w $\mathbb{R}^3$ dla operatora:

$$T(x, y, z) = (x - 4y + z, -4x + y + z, 4x + 4y + 4z).$$

4 Formy dwuliniowe, radykał lewostronny i prawostronny

Zadanie 4.1 (BG t.II, zad. 14.1)**.** Które z następujących przekształceń są formami dwuliniowymi?

(a) $\beta:\ K^3 \times K^3 \to K, \quad \beta(v,w) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$;

(b) $\beta:\ K^n \times K^n \to K, \quad \beta(v,w) = \sum_{j=1}^{n} j x_j y_j$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$;

(c) $\beta:\ K^4 \times K^4 \to K, \quad \beta(v,w) = x_1y_4 + x_2y_3$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$;

(d) $\beta:\ K^4 \times K^4 \to K$, gdzie $\beta(v,w) = x_1y_2 + x_2^2 + x_2y_3$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$, $\operatorname{char} K \neq 2$.

Zadanie 4.2 (BG t.II, zad. 14.2)**.** Znaleźć macierze następujących form dwuliniowych:

(a) $\beta:\ K^3 \times K^3 \to K, \quad \beta(v,w) = x_1y_2 - 2x_2y_3 + 6x_3y_1$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$;

(b) $\beta:\ K^4 \times K^4 \to K$, gdzie $\beta(v,w) = 4x_1y_1 + 3x_2y_4 - 6x_3y_4 + 5x_3y_1 - 9x_4y_2 + 3x_2y_3$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$;

(c) $\beta:\ K^3 \times K^3 \to K$, gdzie $\beta(v,w) = -3x_3y_1$, gdzie $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4.3 (zad. 419, JR)**.** Metodami poznanymi na wykładzie (tj. z definicji oraz korzystając z macierzy przejścia od bazy do bazy), znaleźć macierz formy dwuliniowej $\beta:\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, danej wzorem:

$$\beta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = 4x_1y_1 + 7x_1y_2 + 5x_2y_1 + 9x_2y_2$$

w bazie B, gdzie:

(a) $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$;

(b) $\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}\right)$;

(c) $\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$;

(d) $\left(\begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}\right)$.

Zadanie 4.4 (BG t.II, zad. 14.3)**.** Znaleźć $\mathrm{rad}_L\,\beta$, i $\mathrm{rad}_P\,\beta$ dla następujących form dwuliniowych:

(a) $\beta:\ K^2\times K^2\to K,\quad \beta(v,w)=x_1y_2$, gdzie $v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\ w=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$;

(b) $\beta:\ K^3\times K^3\to K,\quad \beta(v,w)=x_1y_1+x_3y_3$, gdzie $v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ w=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$;

(c) $\beta:\ K^4\times K^4\to K,\quad \beta(v,w)=2x_1y_1+x_1y_3-2x_3y_4+3x_4y_2$, gdzie $v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},\ w=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}$, $\mathrm{char}\,K\neq 2,3$.

Zadanie 4.5 (BG t.II, zad. 14.4)**.** Znaleźć wszystkie macierze $A\in \mathrm{M}_n(K)$ takie, że forma dwuliniowa:

$$\beta(v,w)=v^TAw$$

ma własność

$$\beta(Bv,w)=\beta(v,B^Tw),$$

dla każdego $B\in\mathrm{M}_n(K)$.

Zadanie 4.6 (BG t.II, zad. 14.6)**.** Niech $A\in\mathrm{M}_n(K)$. Wykazać, że jeśli $A\in\mathrm{GL}_n(K)$, to $\mathrm{rad}_L\,\beta=\mathrm{rad}_P\,\beta=\{\theta_n\}$, dla formy dwuliniowej:

$$\beta:\ K^n\times K^n\to K,\quad \beta(v,w)=v^TAw.$$

Zadanie 4.7 (BG t.II, zad. 14.7)**.** Wykazać, że forma dwuliniowa:

$$\beta:\ K^n\times K^n\to K,\quad \beta(v,w)=v^TAw,\quad A\in\mathrm{M}_n(K)$$

ma tę własność, że jeśli $\mathrm{rad}_L\,\beta=\{\theta_n\}$ lub $\mathrm{rad}_P\,\beta=\{\theta_n\}$, to $A\in\mathrm{GL}_n(K)$.

5 Iloczyn skalarny, algorytm Grama-Schmidta

Zadanie 5.1 (zad. 438, JR)**.** Sprawdzić, czy funkcja $\beta:\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ określona danym wzorem jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^2$:

(a) $\beta\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2;$

(b) $\beta\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)=3x_1y_1+4x_1y_2+4x_2y_1+5x_2y_2;$

(c) $\beta\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2.$

Zadanie 5.2 (zad. 445, JR)**.** Wykazać, że w dowolnej przestrzeni euklidesowej równość:

$$\|v\|=\|w\|$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $v+w\perp v-w$.

Zadanie 5.3 (zad. 446, JR)**.** Wykazać, że w dowolnej przestrzeni euklidesowej równość:

$$\|v+w\|=\|v-w\|$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $v\perp w$.

Zadanie 5.4 (zad. 447, JR)**.** W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem:

$$\left\langle\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right\rangle=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$$

obliczyć kąt między danymi wektorami:

(a) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};$

(b) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$

Zadanie 5.5 (zad. 448, JR)**.** W przestrzeni euklidesowej $C_{[-1;1]}$ z iloczynem skalarnym:

$$\langle f,\,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

obliczyć kąt daną parą funkcji:

(a) $f(x)=\sin(\pi x)$, $g(x)=\cos(\pi x)$;

(b) $f(x)=x^2$, $g(x)=x+\sqrt{3}$.

Zadanie 5.6 (zad. 450, JR)**.** Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Wykazać, że dla dowolnych $v,v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$ warunek $v\perp L(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $v\perp v_i$ dla każdego $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Zadanie 5.7 (zad. 452, JR)**.** Niech

$$W=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4:\ x_1+x_2-x_3+x_4=x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$$

będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ z kanonicznym iloczynem skalarnym. Znaleźć jedną z baz przestrzeni $W^\perp$.

Zadanie 5.8 (zad. 453, JR)**.** Sprawdzić, że dla dowolnej przestrzeni euklidesowej V zachodzą równości $\{\theta_V\}^\perp = V$ i $V^\perp = \{\theta_V\}$.

Zadanie 5.9 (zad. 462, JR)**.** Stosując algorytm Grama-Schmidta, znaleźć bazę ortonormalną danej podprzestrzeni przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ z kanonicznym iloczynem skalarnym:

(a) $L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\5\\3\\1\end{bmatrix}\right)$;

(b) $L\left(\begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\8\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\-3\\6\\2\end{bmatrix}\right)$;

(c) $L\left(\begin{bmatrix}5\\3\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\5\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}13\\1\\3\\1\end{bmatrix}\right)$.

Zadanie 5.10 (zad. 465, JR)**.** Wyznaczyć rzut prostopadły wektora v na podprzestrzeń W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ z kanonicznym iloczynem skalarnym, gdzie:

(a) $v = \begin{bmatrix}7\\11\\-7\\5\end{bmatrix}, \quad W = L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\right)$;

(b) $v = \begin{bmatrix}7\\6\\5\\-5\end{bmatrix}, \quad W = L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\4\\4\\6\end{bmatrix}\right)$;

(c) $v = \begin{bmatrix}7\\5\\1\\10\end{bmatrix}, \quad W = L\left(\begin{bmatrix}3\\0\\4\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\4\\8\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\4\\-3\\3\end{bmatrix}\right)$.

Zadanie 5.11 (zad. 466, JR)**.** Podprzestrzeń W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^5$ z kanonicznym iloczynem skalarnym określona jest następująco:

$$W = L\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\2\\-5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\5\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-3\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Nie wyznaczając bazy ortonormalnej podprzestrzeni W, znaleźć rzut prostopadły w wektora $v = \begin{bmatrix}9\\5\\2\\6\\11\end{bmatrix}$ na podprzestrzeń W.

Zadanie 5.12 (zad. 467, JR)**.** Niech $V = \mathbb{R}^4$ (przestrzeń euklidesowa z kanonicznym iloczynem skalarnym), $W = L\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$, $v = \begin{bmatrix}5\\5\\7\\-1\end{bmatrix}$. Wyznaczyć rzut prostopadły wektora v na podprzestrzeń $W^\perp$.

6 Formy kwadratowe

Zadanie 6.1 (zad. 428, 429, JR)**.** Znaleźć macierz dla następujących form kwadratowych.

(a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 21x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;

(b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

(c) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 3x_1x_3 + 5x_2x_3$;

(d) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3$;

(e) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 19x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_1x_4 + 4x_2x_3 + 8x_2x_4 - 8x_3x_4$;

(f) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Zadanie 6.2. Stosując metodę Lagrange'a doprowadzić formy kwadratowe z Zadania 6.1 do postaci kanonicznej oraz podać macierze, które dają podstawienia zmiennych, by otrzymać z form z Zadania 6.1 formy diagonalne.

Zadanie 6.3 (zad. 431, JR)**.** Stosując metodę Jacobiego doprowadzić formę kwadratową q do postaci kanonicznej. Podać macierz, która daje podstawienie zmiennych, by otrzymać z formy q formę diagonalną.

(a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 14x_2x_3$;

(b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 16x_2x_3$;

(c) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 8x_2^2 - 8x_3^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 - 14x_2x_3$;

(d) $q(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 8x_2x_3$;

(e) $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 10x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

(f) $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Zadanie 6.4 (zad. 435, JR)**.** Korzystając z definicji oraz kryterium Sylvestera sprawdzić, czy poniższe formy są dodatnio określone.

(a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$

(b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$

Zadanie 6.5. Sprawdzić, czy następujące formy kwadratowe są dodatnio/ujemnie określone:

(a) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$;

(b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 9x_2^2 + 12x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$;

(c) $q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 10x_2^2 - 10x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;

(d) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 9x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;

(e) $q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 14x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 10x_2x_3$;

(f) $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3$;

(g) $q(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(h) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 21x_2^2 + 13x_3^2 - 12x_1x_2 + 12x_2x_3$;

Zadanie 6.6 (zad. 436, JR)**.** Obliczyć, dla jakich wartości parametru λ forma kwadratowa q dana wzorem $q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$ jest dodatnio określona.

7 Postać kanoniczna Jordana

Stwierdzenie 7.1. *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \dots & A_r \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(K),$$

gdzie $A_1, A_2, \dots, A_r$ są dowolnymi klatkami kwadratowymi, natomiast litery O oznaczają macierze zerowe odpowiednich wymiarów. Niech $f(x) \in K[x]$. Wówczas:

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(A_1) & O & \dots & O \\ O & f(A_2) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \dots & f(A_r) \end{bmatrix}.$$

Stwierdzenie 7.2. *Niech $f(x) \in K[x]$ oraz $\operatorname{char} K = 0$. Niech:*

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

Wówczas

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(a) & f'(a) & \frac{1}{2!}f''(a) & \dots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(a) & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) \\ 0 & f(a) & f'(a) & \dots & \frac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(a) & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(a) & f'(a) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(a) \end{bmatrix}$$

Zadanie 7.1 (zad. 349, 350, JR)**.** Znaleźć postać Jordana B oraz wielomian minimalny $q_A(t)$ danej macierzy $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ oraz taką macierz $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, by zachodziła równość $B = C^{-1}AC$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 \\ 8 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$;

(e) $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$;

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 5 & -6 \\ 8 & 4 & -5 \end{bmatrix}$;

(g) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -7 & 8 \end{bmatrix}$;

(h) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(i) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$;

(j) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Zadanie 7.2 (zad. 337, 338, JR)**.** Niech $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć A^n:

(a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Zadanie 7.3 (zad. 351, JR)**.** Niech $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć n-tą potęgę danej macierzy:

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ -13 & -12 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$